IF01 - Rappels de Calculs de Probabilités

Exercice 1

On dispose d'un jeu de 52 cartes dans lequel on effectue un tirage au hasard avec remise. Calculer la probabilité d'obtenir une dame, un cœur, une dame de cœur ou un as de pique, une dame ou un pique, ni une dame ni un pique.

Exercice 2

On considère une urne contenant 5 boules blanches, 4 boules rouges et 2 boules noires. On tire une boule de celle-ci. Calculer la probabilité qu'elle soit blanche, qu'elle ne soit pas rouge, qu'elle soit blanche ou rouge. On effectue à présent le tirage avec remise de 3 boules. Calculer la probabilité d'obtenir dans l'ordre une boule blanche, une rouge et enfin une noire. Traiter cette même question dans le cas où le tirage est sans remise.

Exercice 3

Au cours d'un Poker, on tire 5 cartes dans un jeu qui en compte 52. Calculer la probabilité d'obtenir une paire soit 2 cartes de même hauteur, un brelan soit 3 cartes de même hauteur, une couleur soit 5 cartes de même couleur, un full soit un brelan et une paire, un carré soit 4 cartes de même hauteur.

Exercice 4

Lorsque les équipes E_1 et E_2 s'affrontent au football, les probabilités que E_1 batte E_2 ou que la rencontre se solde par un match nul valent respectivement $1/2$ et $1/6$. Au cours d'un tournoi, ces deux équipes sont amenées à se rencontrer 5 fois. Calculer la probabilité que E_1 gagne toutes les parties, que E_1 ne gagne pas au moins une fois, que 2 des matchs soient nuls.

Exercice 5

Initialement, une urne I contient 2 boules noires et 3 boules blanches tandis qu'une urne II regroupe 4 boules noires et 6 boules blanches. On procède au tirage d'une boule dans chaque urne. Calculer la probabilité de tirer 2 boules de même couleur. A présent, on suppose que la boule tirée dans I est placée dans II avant de procéder au second tirage. Calculer la probabilité d'obtenir 2 boules de même couleur.

Exercice 6

Un individu est sélectionné au hasard dans une population comptant une proportion p de tricheurs. On lui demande de tirer une carte dans un jeu qui en compte 52. On admet que les tricheurs tirent toujours des as. Calculer la probabilité que l'individu sélectionné obtienne un as. Calculer la probabilité qu'il s'agisse d'un tricheur s'il tire une telle carte.

Exercice 7

On considère le lancé de 2 dés non-pipés. On note X la somme des points obtenus et Y le plus grand nombre de points obtenus avec l'un des dés. Étudier ces deux variables aléatoires.

Problème 1

Une source émet les symboles 0 et 1 avec les probabilités $P(0) = 0.2$ et $P(1) = 0.8$. Ceux-ci sont transmis à un récepteur au travers d'un canal imparfait illustré par la figure 1, avec $p_0 = 10^{-5}$. Calculer la probabilité d'erreur d'une telle transmission. On suppose à présent que chaque symbole émis par la source est transmis simultanément au travers de 2 canaux du même type que le précédent, avec $p_1 = 10^{-5}$ et $p_2 = 2 \cdot 10^{-5}$. Le récepteur a alors en charge de fournir au destinataire un symbole binaire, étant donné un couple de symboles reçu parmi 00, 01, 10 et 11. La règle de décodage adoptée consiste à choisir le symbole qui a le plus de chance d'avoir été émis, étant donnée la paire reçue. Expliciter cette règle de décodage. Calculer la probabilité d'erreur d'une telle transmission et la comparer à celle trouvée précédemment.

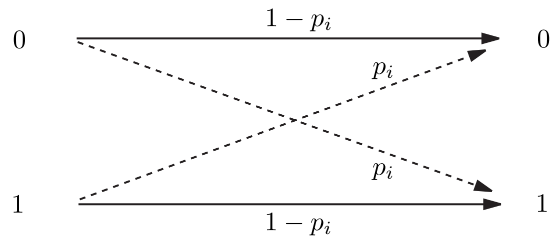


Figure 1: Canal de transmission imparfait.

Problème 2

Soit une source émettant un signal $X(t,\omega)$ constitué d'une séquence de symboles $+a$ et $-a$ au travers d'un canal bruité. On considère que le signal reçu par le récepteur s'écrit $Y(t,\omega) = X(t,\omega) + B(t,\omega)$, où $B(t,\omega)$ est un bruit indépendant de $X(t,\omega)$. Étant donné t, on suppose que X prend les valeurs $+a$ et $-a$ avec les probabilités respectives p et $1-p$, et que B est distribué selon une loi gaussienne centrée de variance σ^2. La règle de décodage adoptée par le récepteur consiste à considérer que le symbole $+a$ a été émis si $Y > \eta$, sinon $-a$, où η désigne un seuil. Calculer la probabilité d'erreur du récepteur en fonction de a, σ^2, η et p. Déterminer la valeur du seuil η minimisant cette probabilité d'erreur. Étudier le cas $p = \frac{1}{2}$ et montrer que la probabilité d'erreur du décodeur s'exprime en fonction de a et σ. Interpréter les résultats. On suppose à présent que le décodeur dispose de n échantillons $Y(t_k,\omega)$ du signal reçu pour déterminer le symbole émis, et que la règle de décision adoptée par celui-ci consiste à comparer la moyenne $Y(\omega) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y(t_k,\omega)$ à un seuil η. Répondre aux mêmes questions que précédemment dans l'hypothèse où les n variables aléatoires $Y(t_k,\omega)$ sont indépendantes. Interpréter les résultats lorsque n tend vers l'infini.

IF01 - Mesure quantitative de l'information (Part I)

Exercice 1

Une personne que vous ne connaissez pas dit : «Aujourd'hui, c'est mon anniversaire !». Calculer l'information propre véhiculée par cette déclaration. Calculer la quantité d'information moyenne associée à une communication de cette nature.

Exercice 2

On suppose que les 64 cases d'un échiquier sont équiprobables. Déterminer la quantité d'information moyenne contenue dans une communication indiquant la position d'une pièce du jeu. Proposer une stratégie dichotomique, reposant sur des questions du type «La pièce est-elle sur cette partie de l'échiquier ?», permettant de deviner la position d'une pièce en un nombre moyen minimum de coups. Comparer le nombre de questions posées à l'entropie en Shannon calculée en début d'exercice.

Exercice 3

Une pièce de monnaie parfaitement équilibrée est lancée jusqu'à ce que la première face apparaisse. Déterminer l'entropie $H(X)$ en Shannon, où la variable aléatoire X désigne le nombre de jets requis. Proposer une stratégie dichotomique, reposant sur des questions à réponse binaire du type « X est plus petite ou plus grande que (...)», permettant de deviner la valeur prise par X en un nombre moyen minimum de coups. Comparer le nombre de questions posées à l'entropie $H(X)$ exprimée en Shannon. Afin de résoudre cet exercice, on pourra avoir recours à l'égalité $\sum_{n=1}^{\infty} n\, a^n = \frac{a}{(1-a)^2}$.

Exercice 4

Soit une source S sans mémoire émettant des mots m_i avec une probabilité p_i. Chacun d'eux est constitué de n_i symboles issus d'un alphabet qui en compte q, dit *alphabet q-aire*. Calculer le nombre moyen $\overline{n}$ de symboles par mot. En notant $H(S)$ l'entropie de la source S, calculer l'entropie de la source q-aire sous-jacente. Après avoir rappelé la valeur maximale que peut prendre cette dernière, établir un minorant de $\overline{n}$. Ceci fournit une limite inférieure à la longueur moyenne des mots codant les états d'une source. En considérant un alphabet binaire, interpréter les résultats des deux précédents exercices.

Exercice 5

On considère une cuve constituée de deux compartiments de volumes identiques. Le compartiment I est rempli de deux gaz inertes en proportions respectives $(\frac{2}{5}, \frac{3}{5})$. Ces mêmes gaz emplissent le compartiment II en proportions $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, respectivement. En supposant que la pression et la température régnant dans chacun des compartiments sont identiques, calculer l'entropie de la cuve avant et après que les deux compartiments communiquent. Interpréter le résultat.

Exercice 6

Une source émet les symboles 0 et 1 avec les probabilités $P(0) = \frac{1}{4}$ et $P(1) = \frac{3}{4}$. Ceux-ci sont transmis à un récepteur au travers d'un canal imparfait illustré par la figure 1, avec $p_0 = 10^{-1}$. En notant X et Y les symboles émis et reçus, calculer les grandeurs suivantes : $H(X)$, $H(Y)$, $H(X,Y)$, $H(Y|X)$, $H(X|Y)$ et $I(X,Y)$.

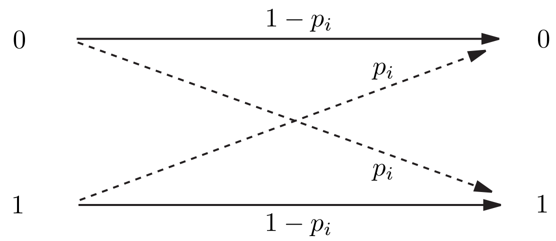


Figure 1: Canal de transmission imparfait.

Problème 1

Soit $\{\mathcal{E}_k\}_{k=1}^n$ une partition d'un ensemble $\mathcal{E}$. On note N et N_k les nombres d'éléments des ensembles $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}_k$, respectivement. On suppose que les éléments de $\mathcal{E}$ sont équiprobables, et on pose $p_k = N_k/N$.

1. Déterminer la quantité d'information propre associée à l'appartenance d'un élément à un ensemble $\mathcal{E}_k$. Calculer la quantité d'information moyenne nécessaire à sa caractérisation au sein de $\mathcal{E}_k$.

2. Calculer la quantité d'information moyenne nécessaire à la caractérisation de tout élément de $\mathcal{E}$. En remarquant que l'on peut décomposer la procédure d'identification d'un élément de $\mathcal{E}$ en 2 étapes, c'est-à-dire (a) identification de l'ensemble $\mathcal{E}_k$ puis (b) détermination de l'élément dans l'ensemble $\mathcal{E}_k$, évaluer la quantité d'information moyenne nécessaire à l'identification du sous-ensemble $\mathcal{E}_k$.

Problème 2

On dispose d'une balance à plateaux et de 9 pièces de monnaie. L'une d'elles est fausse. Il s'agit de l'identifier sachant qu'elle diffère uniquement des 8 autres par le poids.

1. Déterminer le nombre de cas possibles, en considérant que la fausse pièce peut être plus lourde ou plus légère que les autres. En déduire la quantité d'information moyenne nécessaire à l'identification de cette pièce.

2. Décrire le principe d'une pesée élémentaire et ses résultats possibles. En supposant que ces derniers sont équiprobables, déterminer la quantité d'information apportée par chaque pesée. Dans ces conditions, évaluer le nombre de pesées qu'il faut prévoir.

Soit n le nombre de pièces que l'on dispose dans chaque plateau. On cherche n de sorte à maximiser l'entropie H de chaque pesée. Soient P_d, P_g et P_e les probabilités pour que la balance penche à droite, à gauche ou reste en équilibre.

3. Calculer les probabilités P_d, P_g et P_e.

4. Déterminer la valeur de n maximisant H et la quantité d'information moyenne recueillie au cours d'une telle pesée.

IF01 - Mesure quantitative de l'information (Part II)

Exercice

Soit X une variable aléatoire discrète pouvant prendre n valeurs différentes et soit Y une variable aléatoire discrète distribuée de façon uniforme sur m valeurs distinctes. Tout au long de l'exercice, on ne fera aucune hypothèse sur X.

1. Donner l'entropie maximum de X, et préciser le cas dans lequel cette valeur serait obtenue.

2. Calculer l'entropie de Y.

3. Dans le cas où $n = m$, classer par ordre croissant les grandeurs suivantes : $H(Y)$, 0, $H(X)$, $H(X;Y)$, $H(X) + H(Y)$, $H(X|Y)$. Justifier *impérativement* chacune des étapes de votre classement.

4. Expliciter les cas d'égalité dans le classement proposé à la question précédente, c'est-à-dire donner pour chaque inégalité les cas dans lesquels elle devient une égalité.

5. On considère maintenant le cas où la distribution jointe $P(X = x_i; Y = y_j)$ est donnée par le tableau ci-dessous :

$P(X;Y)$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	1/24	1/12	1/6	1/24
x_2	1/6	1/8	1/24	1/6
x_3	1/24	1/24	1/24	1/24

Vérifier que Y est uniformément distribuée. Calculer $I(X;Y)$.

Problème

Pour une région donnée, les prévisions d'un météorologiste se répartissent selon les fréquences relatives données par le tableau ci-dessous. Les colonnes correspondent au temps effectif, que l'on représente par la variable aléatoire T, prenant pour valeur 0 ou 1 selon qu'il fait *mauvais temps* (0) ou *beau temps* (1). Les lignes correspondent à la prévision du météorologiste, que l'on identifie par la variable aléatoire M, également à valeurs dans $\{0, 1\}$ selon qu'il avait prévu du *mauvais temps* (0) ou du *beau temps* (1).

$P(M = i, T = j)$	beau temps ($T = 1$)	mauvais temps ($T = 0$)
beau temps ($M = 1$)	5/8	1/16
mauvais temps ($M = 0$)	3/16	1/8

1. Calculer les probabilités marginales $P(M = i)$ et $P(T = j)$, avec $i, j \in \{0, 1\}$.

2. Montrer que le météorologiste se trompe 1 fois sur 4.

3. Un étudiant éclairé annonce qu'en prévoyant toujours du beau temps, il se trompe moins souvent que le météorologiste. Vérifier cette assertion.

4. Soit E la variable aléatoire représentant la prévision de l'étudiant. Comme pour T et M, celle-ci est à valeur dans $\{0, 1\}$ selon qu'il s'agit de mauvais ou de beau temps. Calculer la valeur de $I(E;T)$.

5. Calculer $I(M;T)$.

6. En comparant $I(M;T)$ à $I(E;T)$, quel éclairage apporte la théorie de l'information sur les prévisions du météorologiste et celles de l'étudiant éclairé ?

7. Venant d'essuyer un cuisant revers, l'étudiant annonce avoir trouvé une méthode révolutionnaire pour prédire la météo. Il se targue d'avoir les résultats mentionnés dans le tableau ci-dessus. Comme précédemment, les lignes correspondent aux prévisions, et les colonnes à la météo effective.

$P(E=i, T=j)$	beau temps ($T=1$)	mauvais temps ($T=0$)
beau temps ($E=1$)	403/512	93/512
mauvais temps ($E=0$)	13/512	3/512

Calculer les probabilités marginales $P(E=0)$ et $P(E=1)$.

8. Comparer $P(E=i, T=j)$ et $P(E=i)\,P(T=j)$, pour tout $i, j \in \{0,1\}$. Conclure sur la pertinence des prévisions de l'étudiant éclairé.

9. On souhaite archiver le temps T en adoptant un codage binaire. En utilisant le premier théorème de Shannon, donner la place mémoire moyenne minimale qu'il faut prévoir, en bits par réalisation de T.

10. Refaire le calcul précédent dans le cas du stockage de M. Quelle place mémoire totale minimale représente le stockage de M et de T, en bits par réalisation du couple (M,T) ?

11. On souhaite à présent coder *conjointement* M et T. Calculer $H(M;T)$. En déduire la place mémoire moyenne minimale qu'il faut prévoir, en bits par réalisation du couple (M,T).

12. Interpréter la différence obtenue entre les résultats des 2 questions précédentes.

13. Proposer un codage de Huffman pour coder les couples (M,T).

14. Calculer la longueur moyenne $\overline{n}$ des mots du code binaire conçu à la question précédente. Comme on pouvait s'y attendre, quelle double inégalité vérifie $\overline{n}$?

IF01 - Codage de source discrète

Exercice 1

Indiquer pour chacun des codes suivants s'il est régulier, déchiffrable, instantané et complet : $\mathcal{C}_1 = \{00, 01, 10, 11\}$, $\mathcal{C}_2 = \{0, 01, 11\}$, $\mathcal{C}_3 = \{0, 10, 11\}$, $\mathcal{C}_4 = \{0, 11, 111\}$.

Exercice 2

On considère une source S pouvant émettre 5 symboles, dont la probabilité p_i de chacun figure dans le tableau ci-dessous. Ce dernier fournit également deux codages binaires possibles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ de S. Indiquer si ces codes sont déchiffrables et instantanés. Calculer la longueur moyenne $\overline{n}_1$ et $\overline{n}_2$ de leurs mots. Comparer ces valeurs à la longueur moyenne minimum $\overline{n}_{\min}$ des mots de tout codage binaire de S.

s_i	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
p_i	0.50	0.18	0.14	0.12	0.06
$\mathcal{C}_1$	0	10	11	101	1001
$\mathcal{C}_2$	00	10	11	010	011

Exercice 3

On considère une variable aléatoire X pouvant prendre n valeurs distribuées selon la loi $P(X = x_i) = \left(\frac{1}{2}\right)^i$ lorsque $i \in \{1, 2 \ldots, n-1\}$, et $P(X = x_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. Déterminer la longueur moyenne minimum des mots d'un code binaire consacré aux valeurs possibles de X. Proposer un code binaire à l'aide de la méthode de Huffman et calculer la longueur moyenne des mots de celui-ci. Expliquer le résultat obtenu.

Exercice 4

Une table traçante utilise les commandes suivantes

lever la plume (LP)
baisser la plume (BP)
transfert avec incrémentation à gauche (–X)
transfert avec incrémentation à droite (+X)
transfert avec incrémentation en haut (+Y)
transfert avec incrémentation en bas (–Y).

Quel est le nombre moyen minimum de bits requis pour ce jeu de commandes, sachant que les probabilités respectives des différents états sont données par

$$P_{\text{LP}} = P_{\text{BP}} = P_{-\text{X}} = 0.1 \qquad P_{+\text{X}} = 0.3 \qquad P_{+\text{Y}} = P_{-\text{Y}} = 0.2$$

Construire un code binaire de Shannon. Utiliser la technique de Huffman pour élaborer un autre code binaire. Comparer les deux solutions obtenues.

Exercice 5

Un lycée doit communiquer par voie télématique une liste de résultats au baccalauréat concernant 2500 étudiants. Ces résultats sont les suivants : 250 mentions bien, 375 mentions assez-bien, 1125 mentions passable, 625 insuffisants et 125 absents. Établir un code de Huffman binaire pour compresser le fichier. Calculer la longueur moyenne des mots utilisés. Calculer la taille du fichier si l'on codait l'information de manière classique, à l'aide d'un code à longueur fixe comprenant 8 bits. Évaluer le gain en taille de fichier réalisé grâce au code de Huffman. Calculer le temps de transmission du fichier si l'on utilise un modem fonctionnant à 14400 bits/s.

Problème 1

On considère un code comprenant deux mots de longueur 2, deux mots de longueur 3 et un mot de longueur 4.

1. Montrer qu'il existe un code binaire déchiffrable respectant ces longueurs de mots. Dessiner un arbre de codage possible. Modifier celui-ci de sorte à réduire la longueur moyenne des mots du code quelle que soit la distribution de probabilité.

2. On donne les probabilités suivantes $\{0.50, 0.18, 0.14, 0.12, 0.06\}$ à chacun des 5 états d'une source. Associer ces probabilités aux mots du code proposé à la question précédente de sorte à minimiser la longueur moyenne de codage. Calculer celle-ci et montrer qu'il existe des codes binaires plus performants.

3. Proposer un code binaire à l'aide de la méthode de Huffman. Comparer la longueur moyenne de ses mots à celle obtenue à la question précédente.

Problème 2

On considère la source markovienne binaire définie ci-dessous, où $p = \frac{1}{10}$.

$$P(S_n = 1|S_{n-1} = 0) = P(S_n = 0|S_{n-1} = 1) = p$$
$$P(S_n = 1|S_{n-1} = 1) = P(S_n = 0|S_{n-1} = 0) = 1 - p.$$

1. Déterminer la distribution stationnaire de la source. Dans la suite de l'exercice, on adoptera celle-ci en guise de distribution initiale des états de la source. Calculer l'entropie de la source en ne prenant pas en compte la dépendance des états. En déduire dans ce cas la longueur moyenne minimum des mots d'un code binaire de cette source.

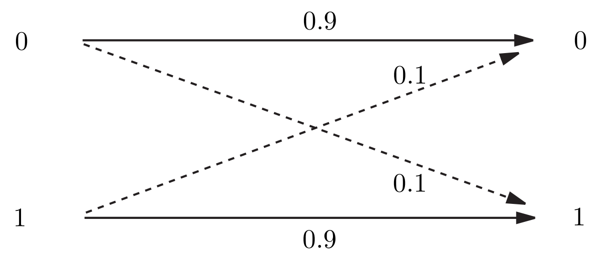
2. Calculer l'entropie de la source markovienne, ce qui suppose la prise en compte de la dépendance d'états successifs. En déduire la longueur moyenne minimum des mots d'un code binaire de cette source.

3. On considère une extension d'ordre 2 de la source. Calculer l'entropie de cette dernière. En déduire dans ce cas la longueur moyenne minimum des mots d'un code binaire de cette source. Proposer un code de Huffman et calculer la longueur moyenne des mots de celui-ci.

IF01 - Canaux discrets

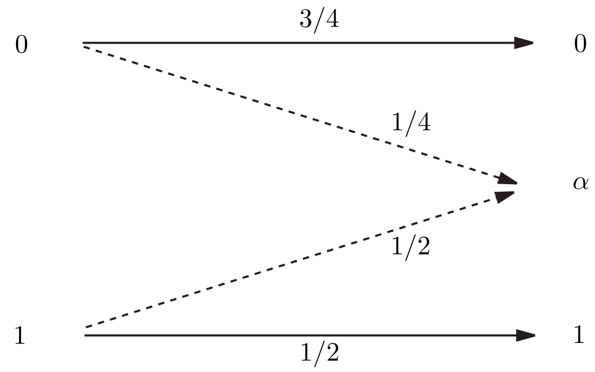
Exercice 1

On considère un canal binaire symétrique d'alphabets d'entrée et de sortie $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$. Calculer $P(X=0)$ et $P(X=1)$ sachant que $P(Y=0)=0.4$ et $P(Y=1)=0.6$. Calculer l'entropie de la source. Calculer l'information mutuelle $I(X;Y)$. Calculer la capacité C de ce canal.



Exercice 2

On considère un canal de transmission d'alphabets d'entrée et sortie définis par $\mathcal{X}=\{0,1\}$ et $\mathcal{Y}=\{0,\alpha,1\}$, respectivement. Sachant que $P(X=0)=2/3$ et $P(X=1)=1/3$, calculer $H(X)$, $H(X|Y=\alpha)$ et $I(X;Y)$. S'agit-il d'un canal symétrique ?



Exercice 3

Calculer les distances de Hamming suivantes : $\mathrm{d_{Ham}}(01001,10110)$; $\mathrm{d_{Ham}}(12345,54321)$.

Exercice 4

Soit le code binaire $\mathcal{C}=\{11100,01001,10010,00111\}$.

1. Déterminer la distance minimale de $\mathcal{C}$.
2. Décoder 10000, 01100 et 00100. Que constate-t-on ?

Exercice 5

Construire un $(8,4,5)$-code binaire.

Exercice 6

Montrer que la distance de Hamming est une métrique.

Exercice 7

Soit x un mot de $\mathcal{A}^n$, avec $|\mathcal{A}| = q$, et soit r un réel strictement positif. La boule de rayon r centrée en x est, par définition :

$$S_q(x,r) = \{y \in \mathcal{A}^n \,|\mathrm{d}(x,y) \leq r\}.$$

1. Représenter $\mathcal{A}^3$ avec $\mathcal{A} = \{0,1\}$ et déterminer la boule de rayon 1 centrée en 111. Combien cette boule a-t-elle de points ?
2. Le volume de $S_q(x,r)$ est le nombre d'éléments de cet ensemble. Pour un rayon donné, il est indépendant de x et on le note $V_q(n,r)$. Calculer $V_q(n,r)$.

Exercice 8

Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}^n$ un code. Par définition, le rayon d'empilement (packing radius) de $\mathcal{C}$ est le plus grand entier r pour lequel les boules $S_q(c,r)$ centrées sur les mots du code sont disjointes. On le note $pr(\mathcal{C})$. Le rayon de recouvrement (covering radius) est le plus petit entier s pour lequel les boules $S_q(c,s)$ centrées sur les mots du code recouvrent $\mathcal{A}^n$. On le note $cr(\mathcal{C})$. Enfin, on dit qu'un code $\mathcal{C}$ est parfait si $pr(\mathcal{C}) = cr(\mathcal{C})$.

1. Si $\mathcal{C}$ est un (n,M,d)-code q-aire tel que $d = 2t+1$, montrer que $\mathcal{C}$ est parfait si et seulement si $M.V_q(n,t) = q^n$.
2. Vérifier que les codes $(n,q^n,1)$, $(n,1,2n+1)$ et $(2n+1,2,2n+1)$ sont parfaits.

IF01 - Les codes linéaires

Exercice 1
Construire les mots du code linéaire $\mathcal{L}$ de longueur 6 dont une matrice génératrice est :

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2
Soit $\mathcal{L}$ le code linéaire dont une matrice génératrice est :

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Construire les mots de $\mathcal{L}$. Combien d'erreurs par mot peut-on détecter et corriger avec ce code ? Mettre $\mathbf{G}$ sous forme standard.

Exercice 3
Soit $\mathcal{L}$ le code linéaire dont une matrice génératrice est :

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Utiliser la méthode de Gauss pour déduire une matrice de test $\mathbf{H}$.

Exercice 4
Dans $(\mathbf{F}_2)^3$, donner tous les codes linéaires de dimension 2. Expliciter la relation donnant le nombre de ces codes.

Exercice 5
On considère la matrice de test suivante :

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le code associé à $\mathbf{H}$ permet-il la correction de 2 erreurs par mot ?

Exercice 6
Soit $\mathcal{L}$ le code linéaire de $(\mathbf{F}_3)^5$ dont une matrice génératrice est :

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Construire les mots du code. Coder le mot d'information (1 2). Soit $\mathbf{G}'$ la matrice suivante :

$$\mathbf{G}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Montrer que cette matrice est une autre matrice génératrice de $\mathcal{L}$.

Exercice 7
Pour chacune des matrices génératrices suivantes, donner une matrice de test.

$$\mathbf{G}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{G}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{G}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8
Trouver la distance minimale du code binaire $\mathcal{L}$ dont une matrice test est donnée par :

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

IF01 - Décodage des codes linéaires

Exercice 1
Soit $\mathcal{L}$ le code linéaire de matrice génératrice :

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quels sont les paramètres de ce code ? Calculer sa table de décodage par tableau standard. Calculer sa table de décodage par syndrome. Décoder de deux manières différentes 111100.

Exercice 2
Soit $\mathcal{L}$ le code linéaire de $\mathbf{F}_3$ ayant pour matrice génératrice :

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donner un tableau standard et un tableau de décodage par syndrome. Décoder 1021.

Exercice 3
Calculer une table de syndromes pour le code de Hamming $\mathcal{H}_2(3)$. A l'aide de cette table, décoder 1101101, 1111111 et 0000001. Après avoir donné la matrice de contrôle de $\mathcal{H}_2(3)$, décoder 1111000, 1110001 et 0001111.

Exercice 4
Soit $\mathcal{L}$ le code linéaire de matrice génératrice :

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer sa matrice de contrôle $\mathbf{H}$. En déduire les paramètres de $\mathcal{L}$. Calculer le syndrome de 1101001.

Exercice 5
Donner la matrice génératrice de $\mathcal{H}_2(3)$.