

Signaux et Systèmes

Systemes du premier et du second ordre

Cédric RICHARD
Université Côte d'Azur

SYSTÈMES LINÉAIRES INVARIANTS DANS LE TEMPS

Caractérisation fréquentielle

Équations différentielles linéaires à coefficients constants

On s'intéresse à la réponse fréquentielle des systèmes définis par

$$\begin{aligned} \frac{d^N y(t)}{dt^N} + a_1 \frac{d^{N-1} y(t)}{dt^{N-1}} + \dots + a_{N-1} \frac{dy(t)}{dt} + a_N y(t) \\ = b_0 \frac{d^M x(t)}{dt^M} + b_1 \frac{d^{M-1} x(t)}{dt^{M-1}} + \dots + b_{M-1} \frac{dx(t)}{dt} + b_M x(t) \end{aligned}$$

Deux approches peuvent être envisagées :

- ▷ utiliser le fait que $x(t) = e^{j\omega t}$ est fonction propre de l'équation ci-dessus afin d'identifier la fonction de transfert $H(\omega)$ telle que

$$y(t) = H(\omega)e^{j\omega t}$$

- ▷ utiliser les propriétés de la transformée de Fourier pour identifier $H(\omega)$

Si les deux approches aboutissent au même résultat, on adopte ici la deuxième

SYSTÈMES LINÉAIRES INVARIANTS DANS LE TEMPS

Caractérisation fréquentielle

Équations différentielles linéaires à coefficients constants

$$\begin{aligned} \frac{d^N y(t)}{dt^N} + a_1 \frac{d^{N-1} y(t)}{dt^{N-1}} + \dots + a_{N-1} \frac{dy(t)}{dt} + a_N y(t) \\ = b_0 \frac{d^M x(t)}{dt^M} + b_1 \frac{d^{M-1} x(t)}{dt^{M-1}} + \dots + b_{M-1} \frac{dx(t)}{dt} + b_M x(t) \end{aligned}$$

Les systèmes ci-dessus étant linéaires invariants dans le temps, leur réponse est donnée par le produit de convolution

$$y(t) = h(t) * x(t) \longleftrightarrow Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$$

ou, de manière équivalente

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$$

SYSTÈMES LINÉAIRES INVARIANTS DANS LE TEMPS

Caractérisation fréquentielle

En appliquant la transformée de Fourier aux deux membres de l'égalité, on obtient

$$\mathcal{F}\left[\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k}\right] = \mathcal{F}\left[\sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}\right]$$

Par la linéarité de la transformée de Fourier, et la propriété de dérivation temporelle

$$\sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k Y(\omega) = \sum_{k=0}^M b_k (j\omega)^k X(\omega)$$

On aboutit finalement à la **fonction de transfert**

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k}$$

SYSTÈMES LINÉAIRES INVARIANTS DANS LE TEMPS

Pôles et zéros

Il est souvent pratique de factoriser les polynômes du numérateur et du dénominateur, et d'écrire la fonction de transfert ainsi

$$H(\omega) = \frac{N(\omega)}{D(\omega)} = K \cdot \frac{(j\omega - z_1)(j\omega - z_2) \dots (j\omega - z_{M-1})(j\omega - z_M)}{(j\omega - p_1)(j\omega - p_2) \dots (j\omega - p_{N-1})(j\omega - p_N)}$$

dont les coefficients $\{z_i, p_i\}$ sont obtenus à partir des coefficients $\{a_i, b_i\}$, et $K = \frac{b_M}{a_N}$

Les coefficients $\{z_i\}$ sont les racines de l'équation $N(\omega) = 0$

Ils sont appelés **zéros** du système

Les coefficients $\{p_i\}$ sont les racines de l'équation $D(\omega) = 0$

Ils sont appelés **pôles** du système

SYSTÈMES LINÉAIRES INVARIANTS DANS LE TEMPS

Exemple

On considère le SLIT défini par

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = x(t), \quad a > 0$$

On en déduit que

$$H(\omega) = \frac{1}{j\omega + a}$$

Le système a un pôle en $(-a)$

On a déjà vu que la transformée de Fourier inverse de $\frac{1}{j\omega + a}$ est $e^{-at}\Gamma(t)$. On en déduit que la réponse impulsionnelle du système est

$$h(t) = e^{-at}\Gamma(t)$$

SYSTÈMES LINÉAIRES INVARIANTS DANS LE TEMPS

Exemple

On considère le SLIT défini par

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t)$$

On en déduit que

$$H(\omega) = \frac{(j\omega) + 2}{(j\omega)^2 + 4(j\omega) + 3}$$

Pour calculer la transformée de Fourier inverse de $H(\omega)$, il est nécessaire de décomposer la fraction rationnelle en éléments simples

$$H(\omega) = \frac{(j\omega) + 2}{(j\omega)^2 + 4(j\omega) + 3} = \frac{\frac{1}{2}}{(j\omega + 1)} + \frac{\frac{1}{2}}{(j\omega + 3)}$$

On en déduit que

$$h(t) = \frac{1}{2}e^{-t}\Gamma(t) + \frac{1}{2}e^{-3t}\Gamma(t)$$

Remarque : le système a deux pôles en (-1) et (-3) , et un zéro en (-2)

SYSTÈMES LINÉAIRES INVARIANTS DANS LE TEMPS

Analyse de la fonction de transfert

$$\begin{aligned}H(\omega) &= \operatorname{Re}[H(\omega)] + j \operatorname{Im}[H(\omega)] \\ &= |H(\omega)| e^{j\varphi(\omega)}\end{aligned}$$

Les grandeurs qui peuvent être étudiées sont

▷ le module $|H(\omega)|$, ou gain $|H(\omega)|_{\text{dB}}$ du système en dB

$$\begin{aligned}|H(\omega)| &= \sqrt{\operatorname{Re}[H(\omega)]^2 + \operatorname{Im}[H(\omega)]^2} \\ |H(\omega)|_{\text{dB}} &= 20 \log_{10} |H(\omega)|\end{aligned}$$

▷ la phase $\varphi_H(\omega)$

$$\varphi_H(\omega) = \arg[H(\omega)] = \tan^{-1} \left(\frac{\operatorname{Im}[H(\omega)]}{\operatorname{Re}[H(\omega)]} \right)$$

DIAGRAMME DE BODE

Gain et phase

Définition

Le diagramme de Bode d'un système $H(\omega)$ est une représentation graphique de ses caractéristiques composée de 2 tracés :

- ▷ le gain $|H(\omega)|_{\text{dB}}$ en dB du système
 - ▷ la phase $\varphi_H(\omega)$, en radians ou degrés
- en fonction de la pulsation ω

Étude et des asymptotes

Le tracé d'un diagramme de Bode débute par celui des asymptotes caractérisant le comportement du système pour $\omega \rightarrow 0$ (basses fréq.) et $\omega \rightarrow +\infty$ (hautes fréq.)

On affine le tracé par des points remarquables aux fréquences de coupure.

- ▷ fournit une esquisse approximative de manière simple
- ▷ facilite l'interprétation de la réponse en fréquence
- ▷ facilite la conception de systèmes ayant les réponses fréquentielles souhaitées
- ▷ ... est aujourd'hui moins indispensable du fait des moyens de calcul existants

DIAGRAMME DE BODE

Propriétés

Afin de faciliter le tracé de diagrammes de Bode, on doit utiliser les propriétés :

Produit

Soit deux systèmes linéaires invariants dans le temps $H_1(\omega)$ et $H_2(\omega)$ en série.

Le système équivalent est $H(\omega) = H_1(\omega)H_2(\omega)$ et l'on a

$$|H(\omega)|_{\text{dB}} = |H_1(\omega)|_{\text{dB}} + |H_2(\omega)|_{\text{dB}}$$

$$\varphi_H(\omega) = \varphi_{H_1}(\omega) + \varphi_{H_2}(\omega)$$

Division

Si la fonction de transfert d'un système linéaire invariant dans le temps peut être

mise sous la forme $H(\omega) = \frac{H_1(\omega)}{H_2(\omega)}$, alors

$$|H(\omega)|_{\text{dB}} = |H_1(\omega)|_{\text{dB}} - |H_2(\omega)|_{\text{dB}}$$

$$\varphi_H(\omega) = \varphi_{H_1}(\omega) - \varphi_{H_2}(\omega)$$

DIAGRAMME DE BODE

Expressions génériques

Une fonction de transfert $H(\omega) = \frac{N(\omega)}{D(\omega)}$ contient les facteurs génériques suivants au numérateur ou au dénominateur :

- ▷ constante K
- ▷ pôles ou zéros à l'origine (facteur $j\omega$ ou $\frac{1}{j\omega}$)
- ▷ pôles ou zéros du premier ordre

$$(j\omega + b) \quad \text{ou} \quad \frac{1}{(j\omega + a)}$$

- ▷ pôles ou zéros du second ordre (complexes conjugués)

$$(j\omega)^2 + b_1(j\omega) + b_0 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{(j\omega)^2 + a_1(j\omega) + a_0}$$

DIAGRAMME DE BODE

Étude de systèmes : fonction constante

Fonction constante : $H(\omega) = K$

$$|H(\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} |K|$$

$$\varphi_H(\omega) = \begin{cases} 0, & K > 0 \\ \pi, & K < 0 \end{cases}$$

DIAGRAMME DE BODE

Étude de systèmes : fonction constante

Exemple : $H(\omega) = K = 10 \Rightarrow |H(\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} 10 = 20 \text{ dB}$

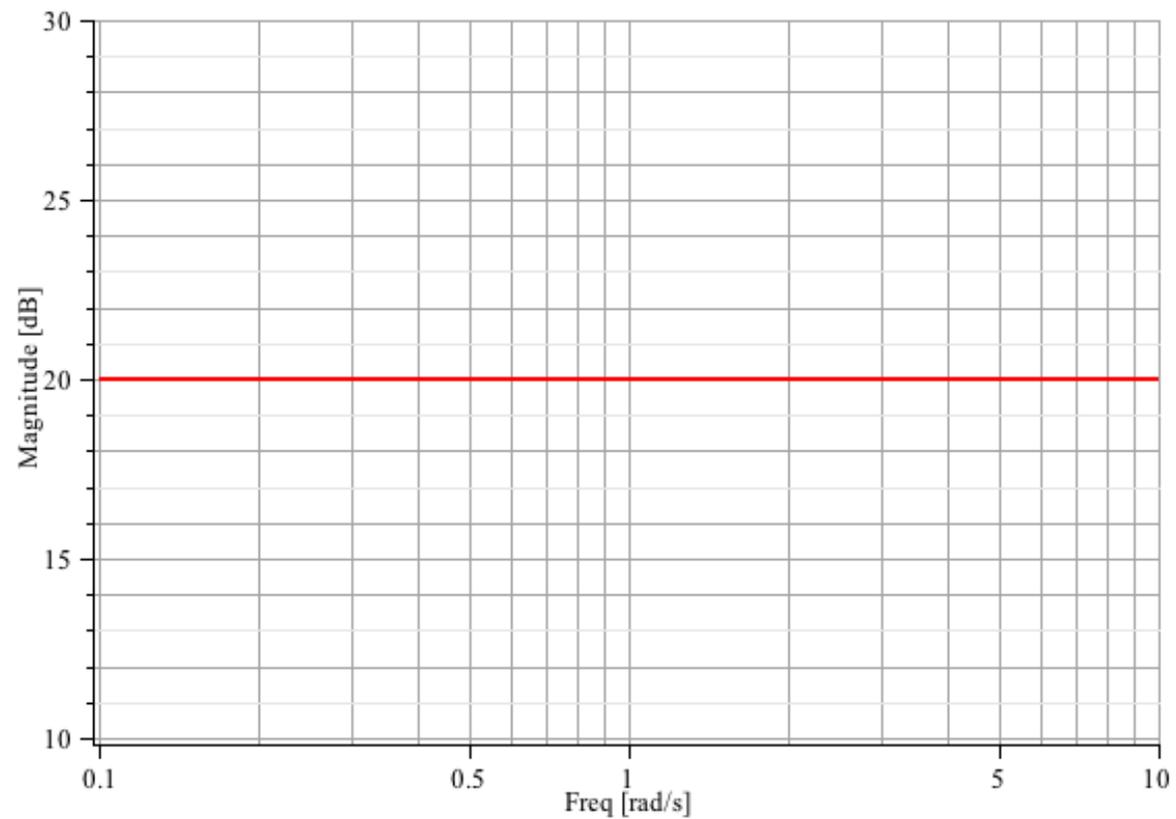


DIAGRAMME DE BODE

Étude de systèmes : fonction constante

Exemple : $H(\omega) = K = 10 \Rightarrow \varphi_H(\omega) = 0$

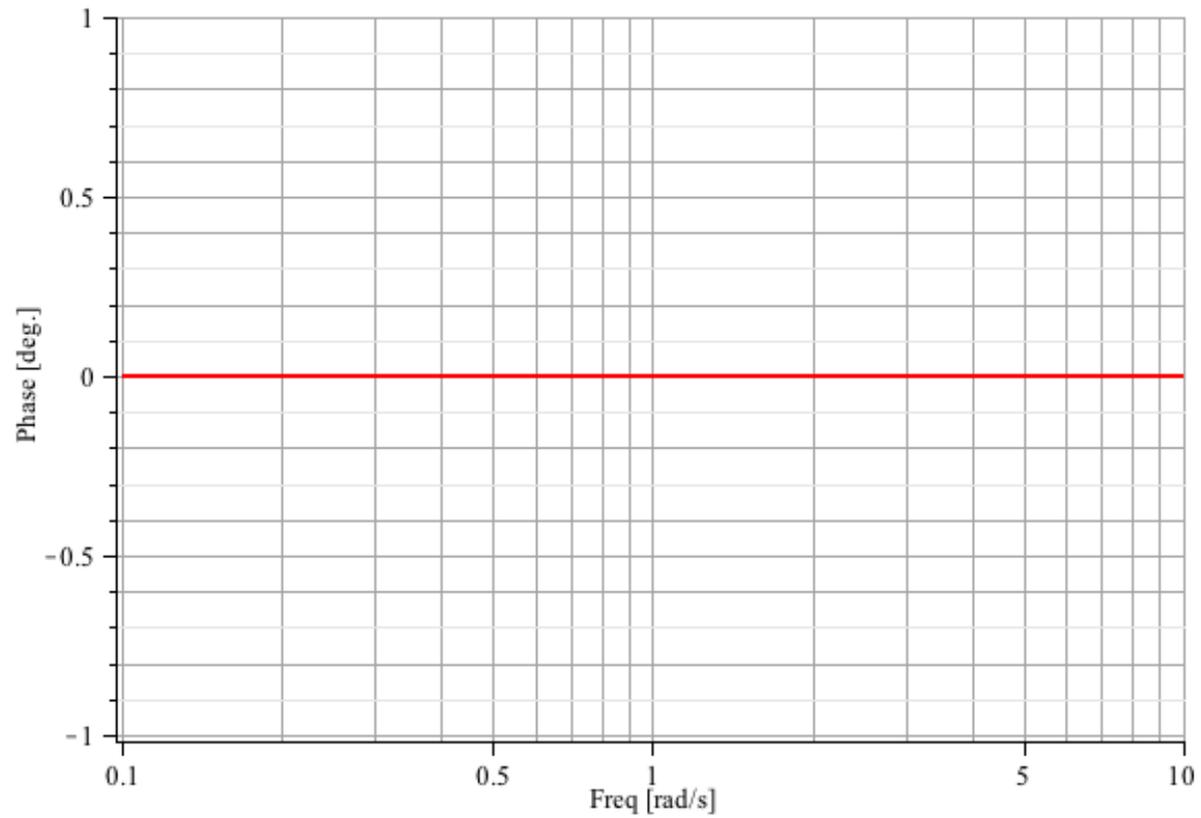


DIAGRAMME DE BODE

Étude de systèmes : pôle ou zéro à l'origine

Zéro à l'origine : $H(\omega) = j\omega$

Le système considéré est un dérivateur. En effet :

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \quad \longleftrightarrow \quad Y(\omega) = j\omega X(\omega)$$

On a donc

$$|H(\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} \omega$$

$$\varphi_H(\omega) = \frac{\pi}{2}$$

Le gain du système est de **+20 dB/décade**

Pôle à l'origine : $H(\omega) = \frac{1}{j\omega}$

De la même manière que ci-dessus :

$$|H(\omega)|_{\text{dB}} = -20 \log_{10} \omega$$

$$\varphi_H(\omega) = -\frac{\pi}{2}$$

DIAGRAMME DE BODE

Étude de systèmes : zéro à l'origine (dérivateur)

Exemple : $H(\omega) = j\omega \Rightarrow |H(\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} \omega$ (+20 dB/décade)

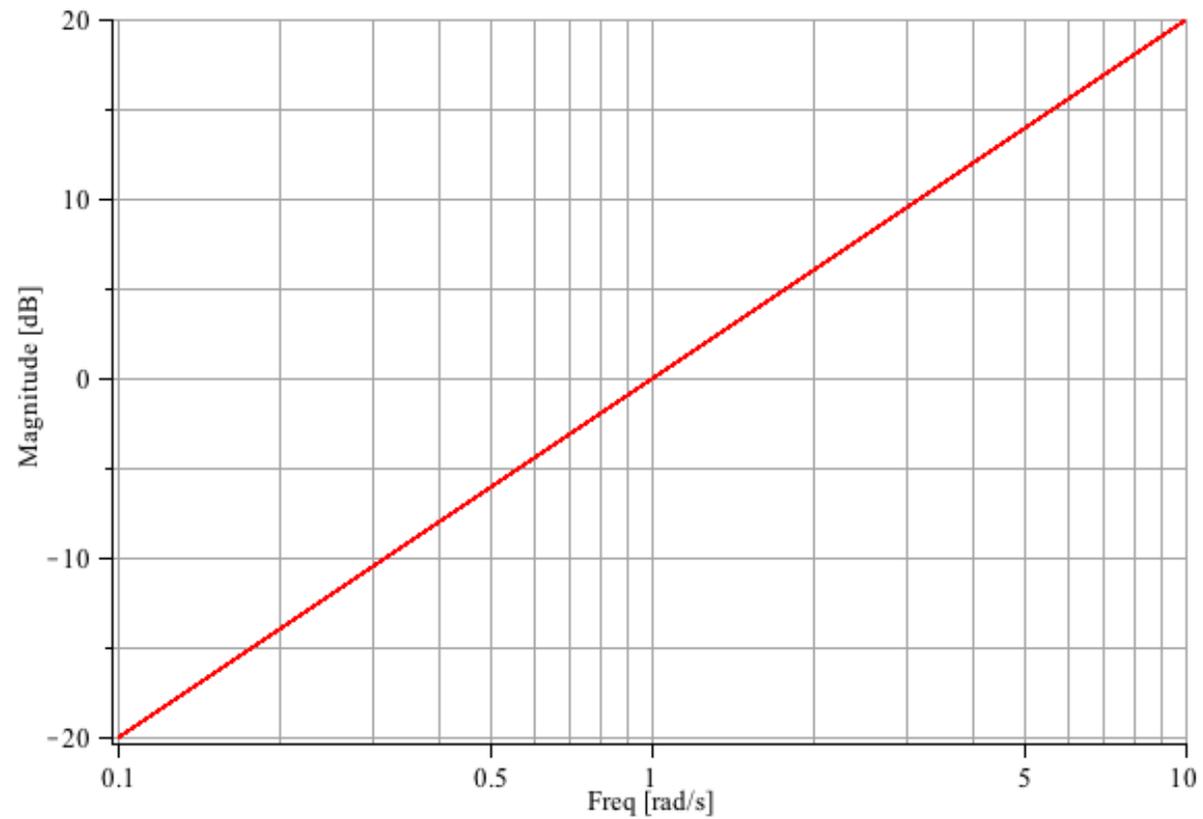


DIAGRAMME DE BODE

Étude de systèmes : zéro à l'origine (dérivateur)

Exemple : $H(\omega) = j\omega \Rightarrow \varphi_H(\omega) = \frac{\pi}{2}$

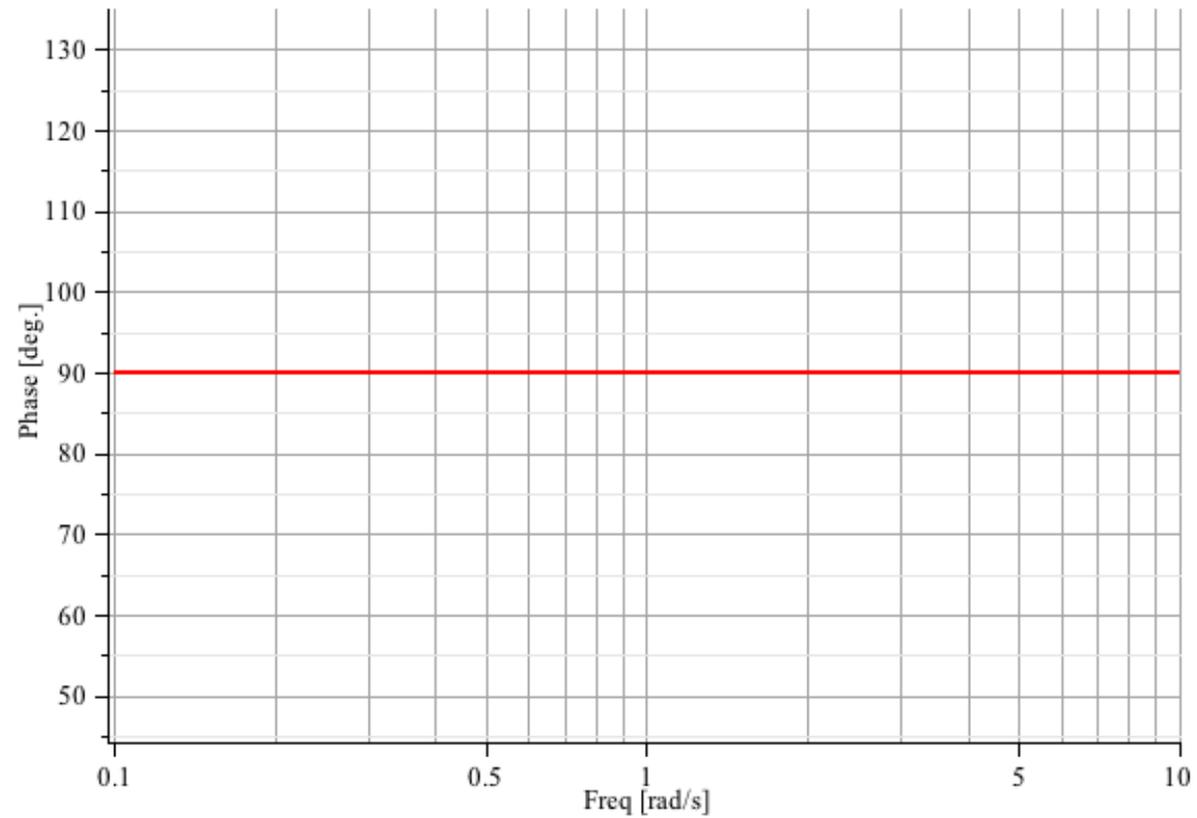


DIAGRAMME DE BODE

Filtre passe-bas du premier ordre : module

Filtre passe-bas : $H(\omega) = \frac{1}{1+j\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)}$

$$H(\omega) = \frac{1}{1+j\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)} \Rightarrow |H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}}$$

$$|H(\omega)|_{\text{dB}} = -10 \log_{10} \left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^2 \right]$$

1. $\omega \ll \omega_c$

$$|H(\omega)|_{\text{dB}} \approx -10 \log_{10} 1 = 0 \text{ dB}$$

2. $\omega \gg \omega_c$

$$|H(\omega)|_{\text{dB}} \approx -10 \log_{10} \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^2 = -20 \log_{10} \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right) \leftarrow -20 \text{ dB/décade}$$

DIAGRAMME DE BODE

Filtre passe-bas du premier ordre : module

Exemple : $H(\omega) = \frac{1}{1+j\left(\frac{\omega}{10}\right)} \Rightarrow |H(\omega)|_{\text{dB}} = -10 \log_{10} \left[1 + \left(\frac{\omega}{10}\right)^2 \right]$

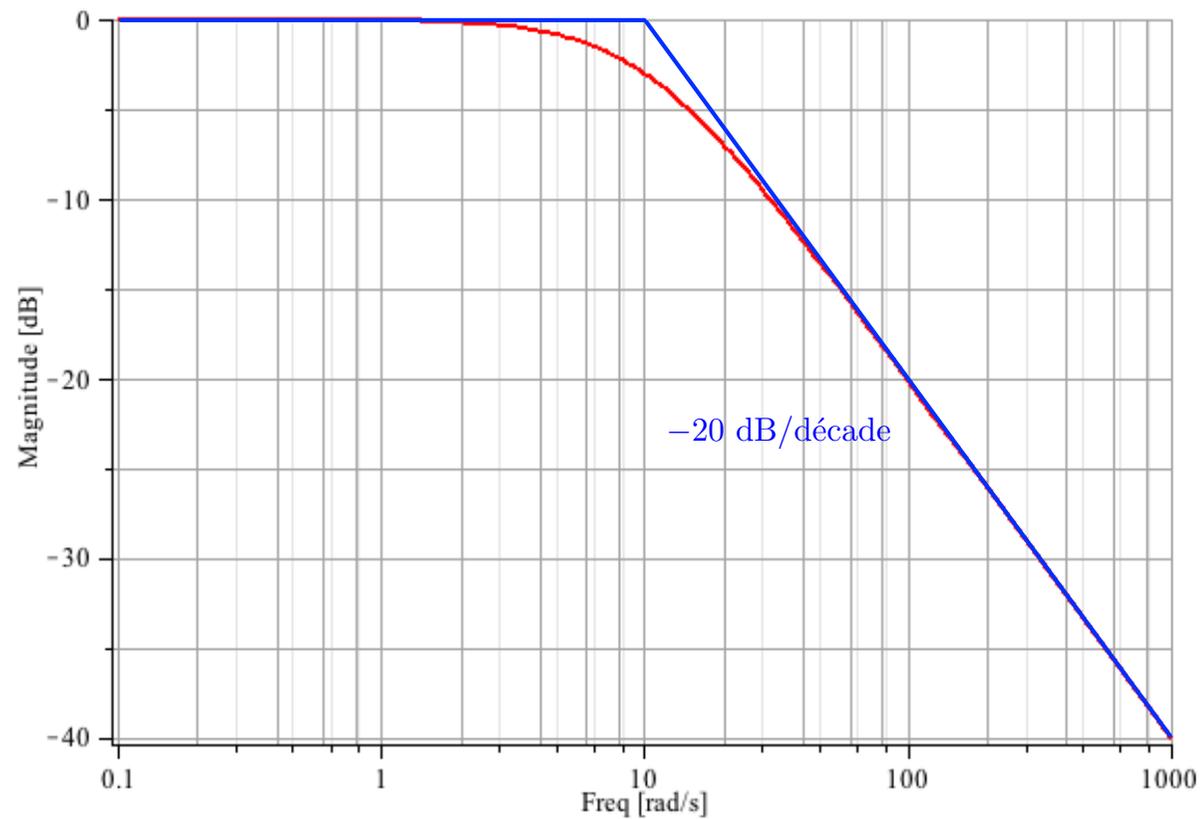


DIAGRAMME DE BODE

Filtre passe-bas du premier ordre : phase

Filtre passe-bas : $H(\omega) = \frac{1}{1+j\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)}$

$$H(\omega) = \frac{1}{1+j\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)} \Rightarrow \varphi_H(\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$

$$\varphi_H(\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$

1. $\omega \ll \omega_c$

$$\varphi_H(\omega) = 0 \text{ rad}$$

2. $\omega \gg \omega_c$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi_H(\omega) = -\frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

DIAGRAMME DE BODE

Filtre passe-bas du premier ordre : phase

Exemple : $H(\omega) = \frac{1}{1+j\left(\frac{\omega}{10}\right)} \Rightarrow \varphi_H(\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{10}\right)$

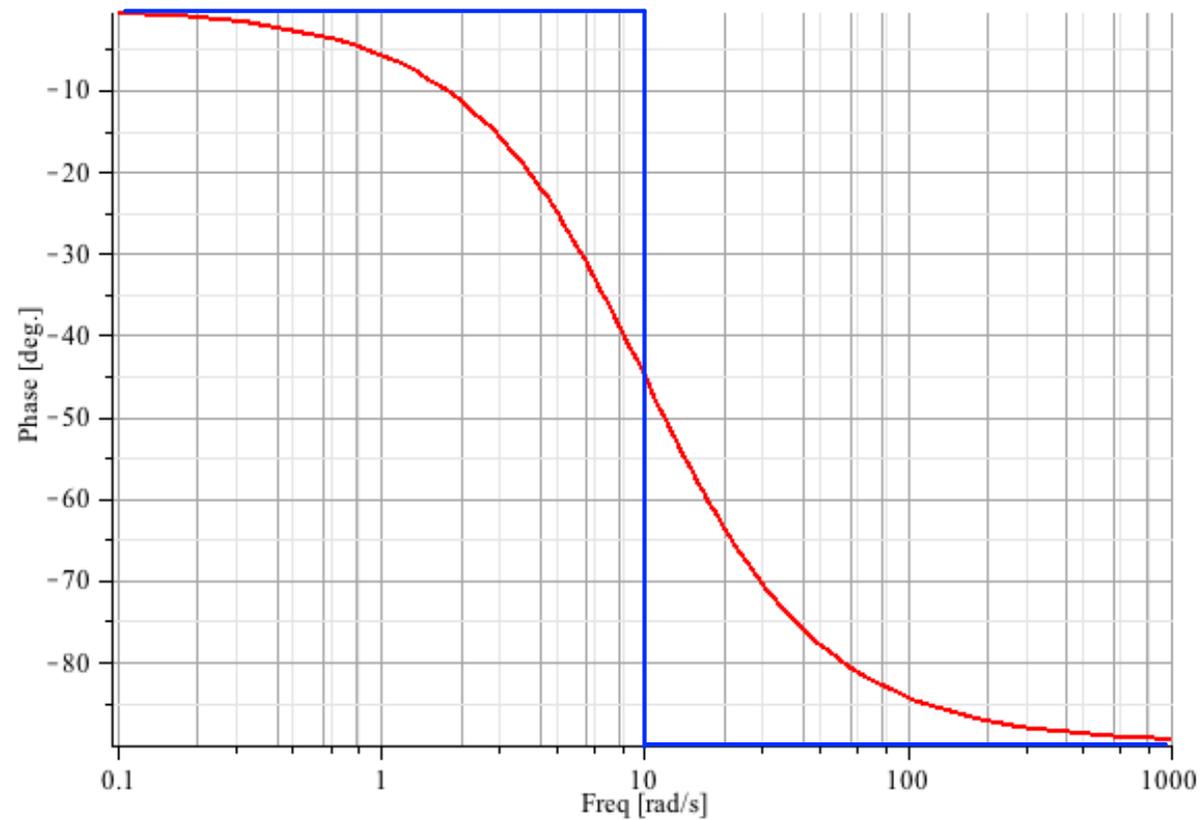


DIAGRAMME DE BODE

Filtre passe-haut du premier ordre : module

Filtre passe-haut : $H(\omega) = 1 + j\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$

$$H(\omega) = 1 + j\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) \Rightarrow |H(\omega)| = \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}$$

$$|H(\omega)|_{\text{dB}} = 10 \log_{10} \left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 \right]$$

1. $\omega \ll \omega_c$

$$|H(\omega)|_{\text{dB}} \approx 10 \log_{10} 1 = 0 \text{ dB}$$

2. $\omega \gg \omega_c$

$$|H(\omega)|_{\text{dB}} \approx 10 \log_{10} \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 = 20 \log_{10} \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) \leftarrow +20 \text{ dB/décade}$$

DIAGRAMME DE BODE

Filtre passe-haut du premier ordre : module

Exemple : $H(\omega) = 1 + j\left(\frac{\omega}{10}\right) \Rightarrow |H(\omega)|_{\text{dB}} = 10 \log_{10} \left[1 + \left(\frac{\omega}{10}\right)^2 \right]$

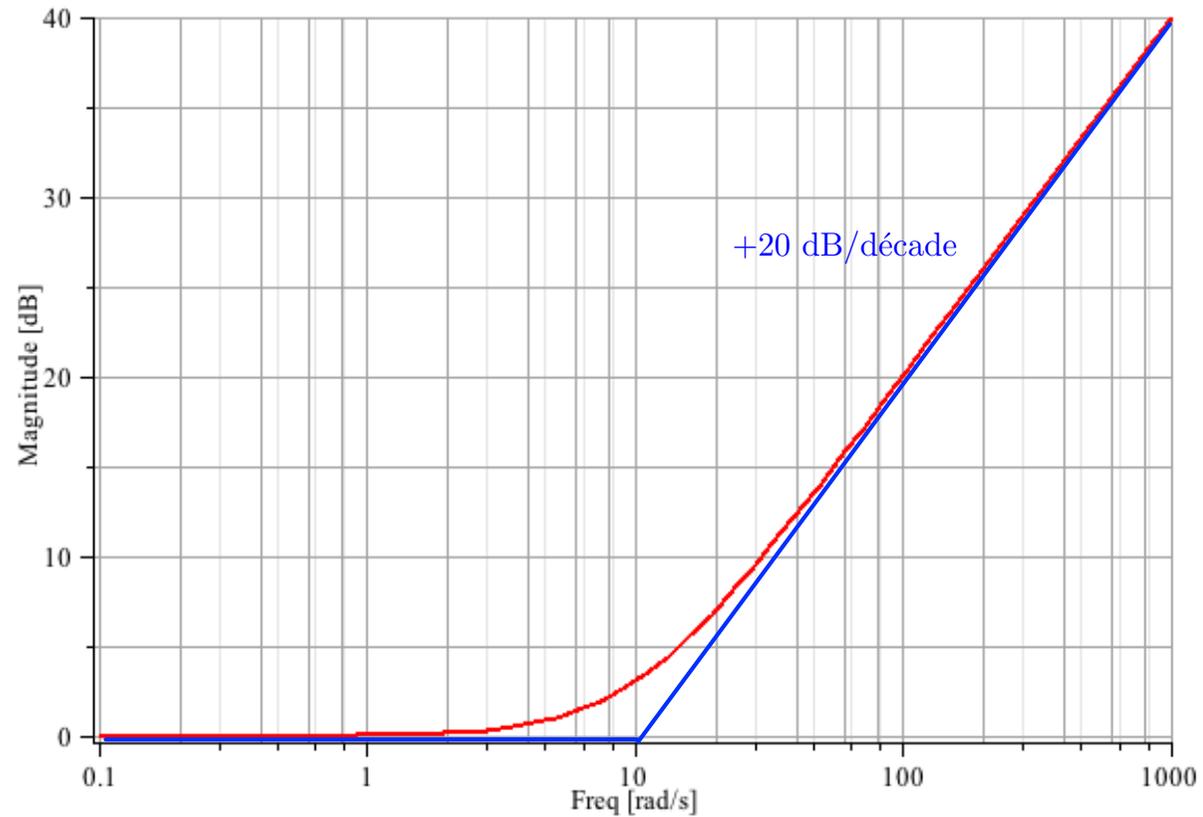


DIAGRAMME DE BODE

Filtre passe-haut du premier ordre : phase

Filtre passe-haut : $H(\omega) = 1 + j\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$

$$H(\omega) = 1 + j\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) \Rightarrow \varphi_H(\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$

$$\varphi_H(\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$

1. $\omega \ll \omega_c$

$$\varphi_H(\omega) = 0 \text{ rad}$$

2. $\omega \gg \omega_c$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi_H(\omega) = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

DIAGRAMME DE BODE

Filtre passe-haut du premier ordre : phase

Exemple : $H(\omega) = 1 + j\left(\frac{\omega}{10}\right) \Rightarrow \varphi_H(\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{10}\right)$

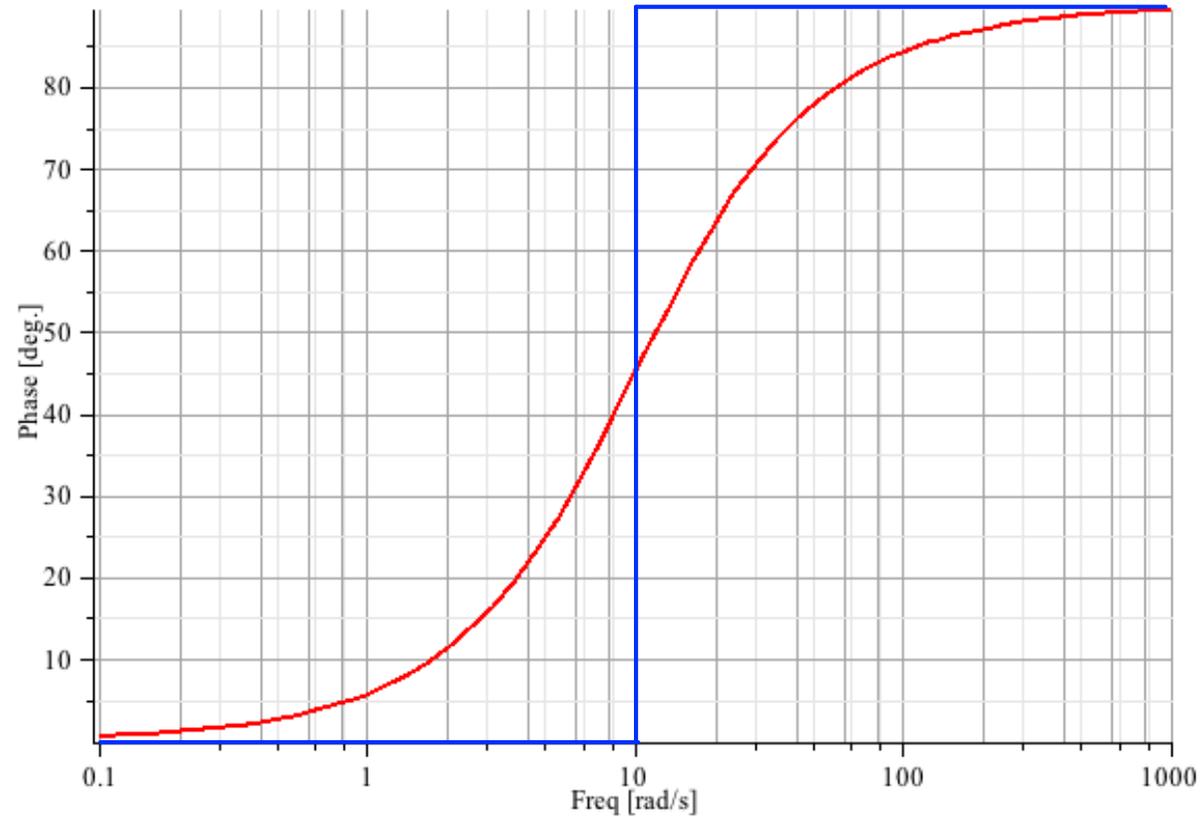


DIAGRAMME DE BODE

Systèmes du second ordre

Définition

Les systèmes du second ordre sont régis par l'équation différentielle linéaire

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\xi\omega_n \frac{dy(t)}{dt} + \omega_n^2 y(t) = K\omega_n^2 x(t)$$

Fonction de transfert

Après avoir posé $K = 1$ de sorte que $H(0) = 1$, on s'intéresse à

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\xi\omega_n(j\omega) + \omega_n^2} = \frac{1}{1 + \frac{2\xi}{\omega_n}(j\omega) + \frac{1}{\omega_n^2}(j\omega)^2} \\ &= \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right] + j2\xi\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)} \end{aligned}$$

ξ : facteur d'amortissement ω_n : fréquence naturelle ou de résonance

DIAGRAMME DE BODE

Systèmes du second ordre

Recherche des pôles

$$H(\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\xi\omega_n(j\omega) + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{D(\omega)}$$

Les pôles du système sont obtenus en résolvant $D(\omega) = 0$. Ainsi on trouve

$$j\omega = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$$

On montre que

$$h(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_n\sqrt{1 - \xi^2} t) \Gamma(t)$$

sous réserve que

$$\left. \begin{array}{l} \text{système stable : } \xi > 0 \\ \text{pôles complexes : } \xi < 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 < \xi < 1$$

DIAGRAMME DE BODE

Systèmes du second ordre : module

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4\xi^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

$$|H(\omega)|_{\text{dB}} = -10 \log_{10} \left\{ \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4\xi^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \right\}$$

DIAGRAMME DE BODE

Systèmes du second ordre : module

$$|H(\omega)|_{\text{dB}} = -10 \log_{10} \left\{ \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^2 + 4 \xi^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right\}$$

a) $\omega \ll \omega_n$

$$|H(\omega)|_{\text{dB}} \approx -10 \log_{10} 1 = 0 \text{ dB}$$

b) $\omega \gg \omega_n$

$$|H(\omega)|_{\text{dB}} \approx -10 \log_{10} \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^4 = -40 \log_{10} \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)$$

La décroissance du gain dans la bande de coupure est de -40 dB/décade

DIAGRAMME DE BODE

Systèmes du second ordre : module

$$|H(\omega)|_{\text{dB}} = -10 \log_{10} \left\{ \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^2 + 4 \xi^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right\}$$

c) $\omega = \omega_n$

$$\begin{aligned} |H(\omega)|_{\text{dB}} &= -10 \log_{10}(2 \xi)^2 = -20 \log_{10}(2 \xi) \\ &\approx -6 \text{ dB} - 20 \log_{10}(\xi) = -6 \text{ dB} + 20 \log_{10} \left(\frac{1}{\xi} \right) \end{aligned}$$

- ▷ $|H(\omega_n)|_{\text{dB}}$ dépend de la valeur de ξ
- ▷ plus l'amortissement ξ est faible, plus $|H(\omega_n)|$ est grand
- ▷ par exemple : $\xi = 0.1 \Rightarrow |H(\omega_n)|_{\text{dB}} \approx 14 \text{ dB}$

DIAGRAMME DE BODE

Systèmes du second ordre : module

Exemple : $H(\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\xi\omega_n(j\omega) + \omega_n^2}$ avec : $\omega_n = 10$ rad/s, $\xi = 0.1$

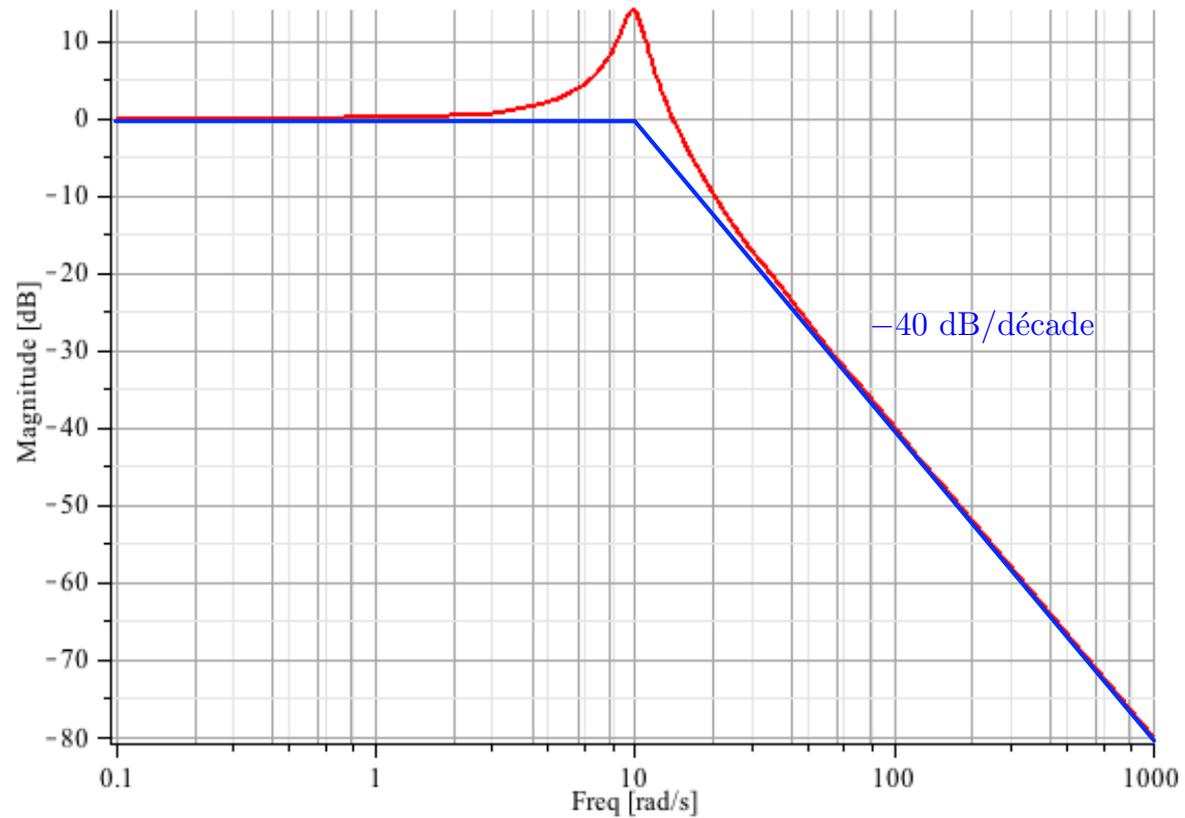


DIAGRAMME DE BODE

Systèmes du second ordre : phase

$$H(\omega) = \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right] + j 2\xi \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}$$

$$\varphi_H(\omega) = -\tan^{-1} \left[\frac{2\xi \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \right]$$

DIAGRAMME DE BODE

Systèmes du second ordre : phase

$$\varphi_H(\omega) = -\tan^{-1} \left[\frac{2\xi \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} \right]$$

a) $\omega \ll \omega_n$

$$\varphi_H(\omega) \approx 0 \text{ rad}$$

b) $\omega \gg \omega_n$

$$\varphi_H(\omega) \approx -\tan^{-1} \left[\frac{-2\xi\omega_n}{\omega} \right] \text{ pour } \omega \rightarrow \infty$$

Puisque $\frac{2\xi\omega_n}{\omega} > 0$, on en déduit

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi_H(\omega) = -\pi \text{ rad}$$

DIAGRAMME DE BODE

Systèmes du second ordre : phase

$$\varphi_H(\omega) = -\tan^{-1} \left[\frac{2\xi \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} \right]$$

c) $\omega = \omega_n$

$$\varphi_H(\omega) = -\frac{\pi}{2}$$

d) Au voisinage de $\omega = \omega_n$

$$\frac{d\varphi_H(\omega)}{d\omega} = -\frac{\frac{2\xi}{\omega_n} \left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^2 + 4\xi^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} \approx -\frac{1}{\xi\omega_n}$$

Plus $\xi\omega_n$ est faible, plus la pente de $\varphi_H(\omega)$ en ω_n est importante

DIAGRAMME DE BODE

Systèmes du second ordre : phase

Exemple : $H(\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\xi\omega_n(j\omega) + \omega_n^2}$ avec : $\omega_n = 10$ rad/s, $\xi = 0.1$

