Signaux et Systèmes

Caractérisation fréquentielle

Cédric RICHARD
Université Côte d'Azur

Systèmes linéaires invariants dans le temps

Fonctions propres

Réponse à un signal exponentiel complexe : $x(t) = e^{st}, s \in \mathbb{C}$

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}\,d\tau$$

Puisque s et t sont constants vis-à-vis de l'intégration par rapport à τ

$$y(t) = e^{st}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau = e^{st}H(s)$$

où $H(s)$ n'est pas une fonction de la variable t

$$\boxed{H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau}$$

Les fonctions exponentielles sont donc fonctions propres des SLIT car :

$$\boxed{x(t) = e^{st} \quad \rightarrow \quad y(t) = H(s)e^{st}}$$

Systèmes linéaires invariants dans le temps

Fonctions propres

$$\boxed{\text{Les fonctions exponentielles complexes sont fonctions propres des SLIT}}$$

On peut donc calculer la réponse d'un SLIT à toute combinaison linéaire (discrète ou continue) de fonctions exponentielles complexes à l'aide de $H(s)$:

$$x(t) = a_1 e^{s_1 t} + \ldots + a_N e^{s_N t} \longrightarrow y(t) = a_1 H(s_1) e^{s_1 t} + \ldots + a_N H(s_N) s^{s_N t}$$

$$x(t) = \int a(s) e^{st}\, ds \longrightarrow y(t) = \int H(s) a(s) e^{st}\, ds$$

Conséquence

Les fonctions exponentielles complexes peuvent servir de base à l'étude des SLIT

- ▷ si l'on peut décomposer les signaux d'entrée sous forme de combinaisons linéaires de fonctions exponentielles complexes
- ▷ si l'on peut déterminer $H(s)$, dite fonction de transfert du système

Caractérisation fréquentielle

Série de Fourier

Définition (coefficients complexes)

On appelle série de Fourier du signal complexe $x(t)$ de période T_0 la fonction :

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \qquad \text{avec} \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi f_0}$$

où les coefficients complexes c_k sont appelés coefficients de Fourier de $x(t)$

Définition (coefficients réels)

Si $x(t)$ est à valeurs réelles, une formulation alternative de la série de Fourier est :

$$\boxed{x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \Big(a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t) \Big)}$$

où les coefficients $\{a_k, b_k\}$ sont réels

Détermination des coefficients de Fourier complexes

Soit $x(t)$ un signal complexe périodique de période T_0. En supposant que $x(t)$ puisse s'exprimer selon la série de Fourier

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

on a besoin d'une procédure pour identifier les coefficients $\{c_k\}$

En multipliant chaque membre de l'expression ci-dessus par $e^{-jn\omega_0 t}$, et en intégrant sur une période, on aboutit à

$$\boxed{c_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt}$$

Remarque : $c_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t)\, dt$ est la valeur moyenne du signal

Caractérisation fréquentielle

Série de Fourier

Vocabulaire

On appelle harmonique de rang $k > 0$ la fonction périodique de pulsation $k\omega_0$

$$h_k(t) = c_k e^{jk\omega_0 t} + c_{-k} e^{-jk\omega_0 t}$$

La pulsation ω_0 est dite pulsation fondamentale

La décomposition en série de Fourier est obtenue en sommant les harmoniques

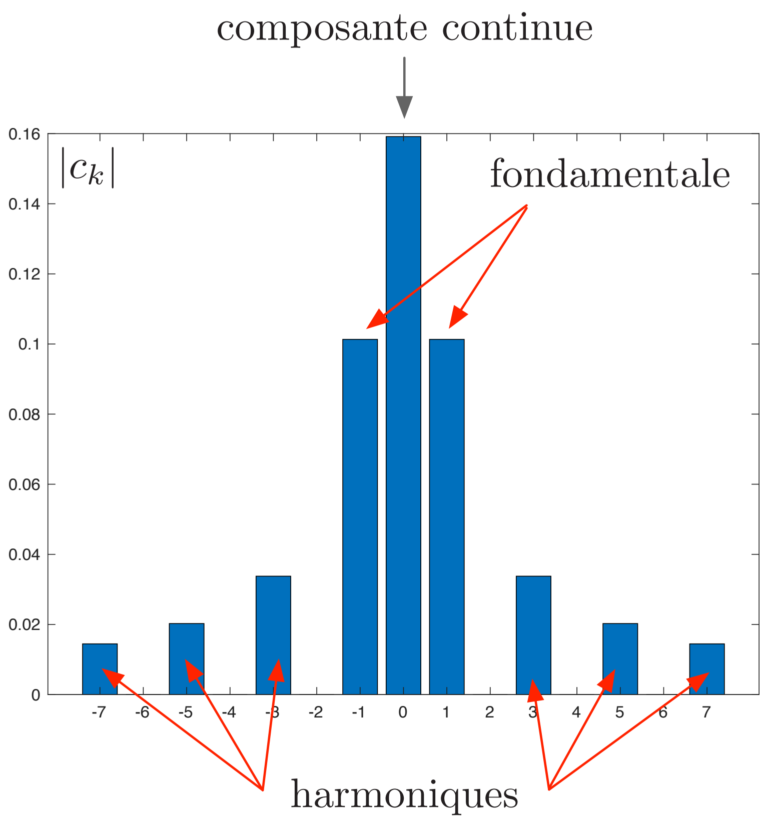
$$x(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} h_k(t)$$

où c_0 est la composante continue (valeur moyenne)

Caractérisation fréquentielle

Série de Fourier

Vocabulaire



Caractérisation fréquentielle

Série de Fourier

Détermination des coefficients de Fourier réels

Soit $x(t)$ un signal réel périodique de période T_0. En supposant que $x(t)$ puisse s'exprimer selon la série de Fourier

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \Big(a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t) \Big)$$

D'après l'expression des $\{c_k\}$, avec $\mathrm{Re}[x(t)] = x(t)$ lorsque $x(t)$ est réel, on obtient

$$\boxed{\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos(k\omega_0 t)\, dt \quad k > 0 \\ b_k &= \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \sin(k\omega_0 t)\, dt \quad k > 0 \\ a_0 &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t)\, dt \end{aligned}}$$

Relation entre les coefficients réels et complexes

Les coefficients $\{(a_k, b_k)\}$ et $\{c_k\}$ pour $k > 0$ sont liés par les relations

$$a_k = c_k + c_{-k} \qquad b_k = j(c_k - c_{-k})$$

et, réciproquement

$$c_k = \frac{a_k - jb_k}{2} \qquad c_{-k} = \frac{a_k + jb_k}{2}$$

Enfin

$$c_0 = a_0$$

Remarque

- Les coefficients $\{a_k\}$ sont nuls si $x(t)$ est impair, y compris a_0
- Les coefficients $\{b_k\}$ sont nuls si $x(t)$ est pair

Caractérisation fréquentielle

Série de Fourier

Théorème de Dirichlet
Soit $x(t)$ un signal périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, de période T_0, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Alors la série de Fourier de $x(t)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ et a pour somme la régularisée $\tilde{x}(t) \triangleq \frac{1}{2}\big(x(t^+) + x(t^-)\big)$ de $x(t)$.

Ainsi, sous ces hypothèses, pour tout t de $\mathbb{R}$, on a

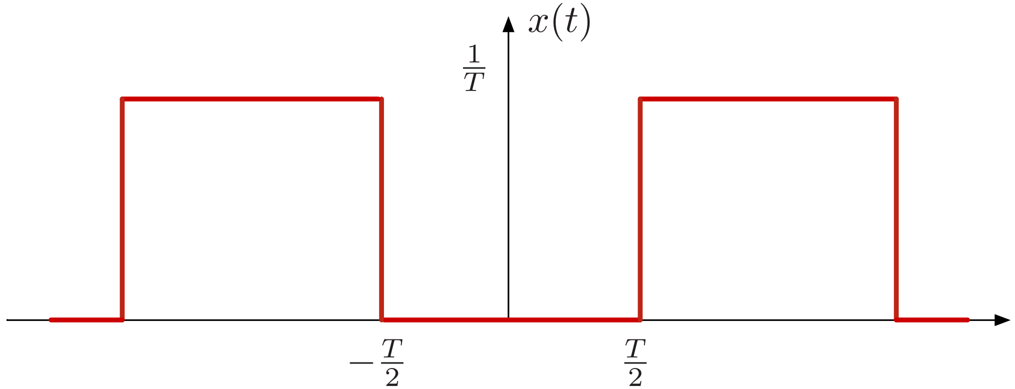
$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

Caractérisation fréquentielle

Série de Fourier

Exercice : signal carré de période $T_0 = 2T$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Pi_T\Big(t - (2k+1)T\Big)$$



Caractérisation fréquentielle

Série de Fourier

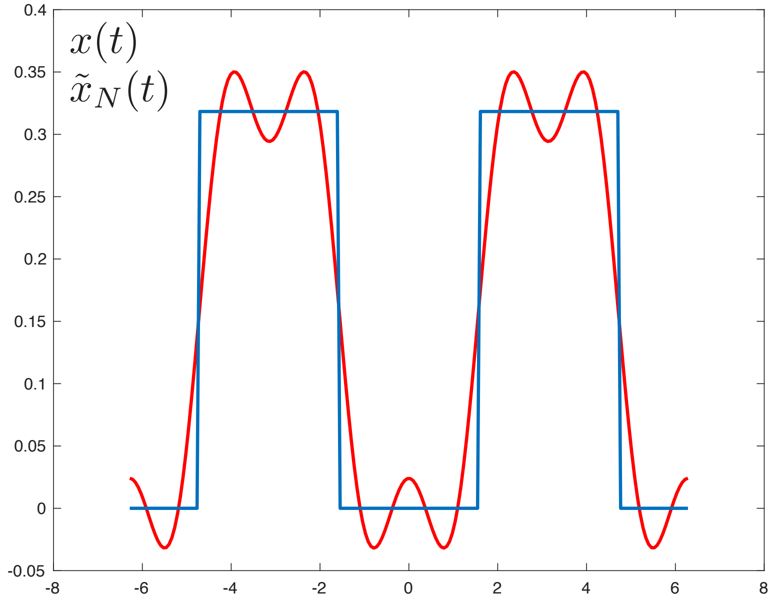
Exercice : signal carré de période $T_0 = 2T$

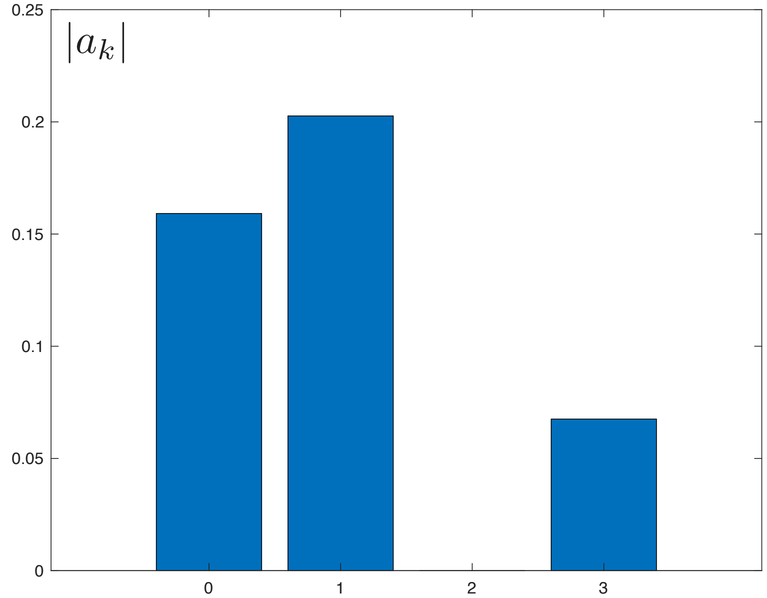
$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2T} \\
a_k &= -\frac{2}{k\pi T}\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) \qquad\qquad k \neq 0 \\
b_k &= 0
\end{aligned}
$$

Caractérisation fréquentielle

Série de Fourier

Exercice : reconstruction du signal carré, $k = 0, \ldots, 3$

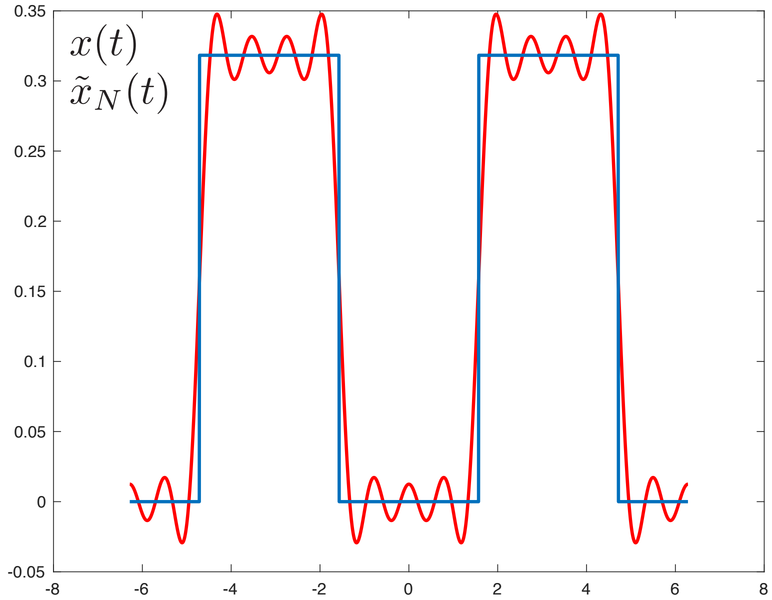


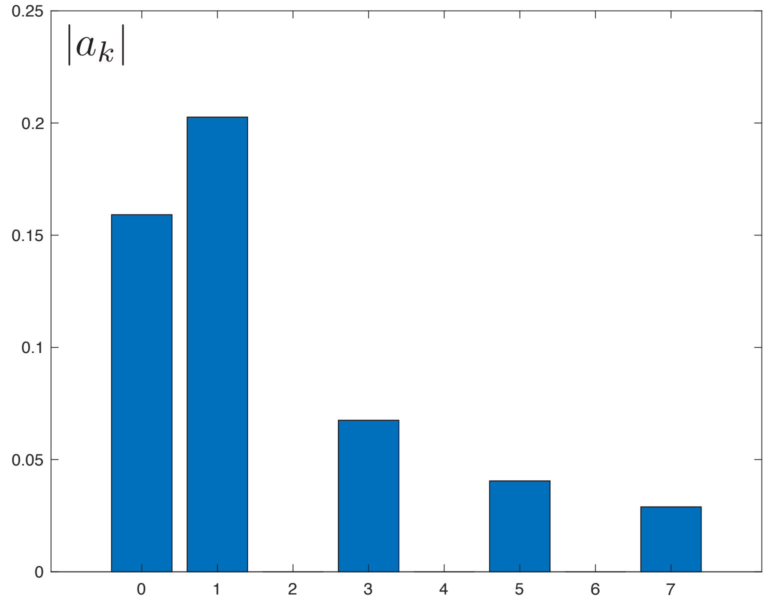


Caractérisation fréquentielle

Série de Fourier

Exercice : reconstruction du signal carré, $k = 0, \ldots, 7$

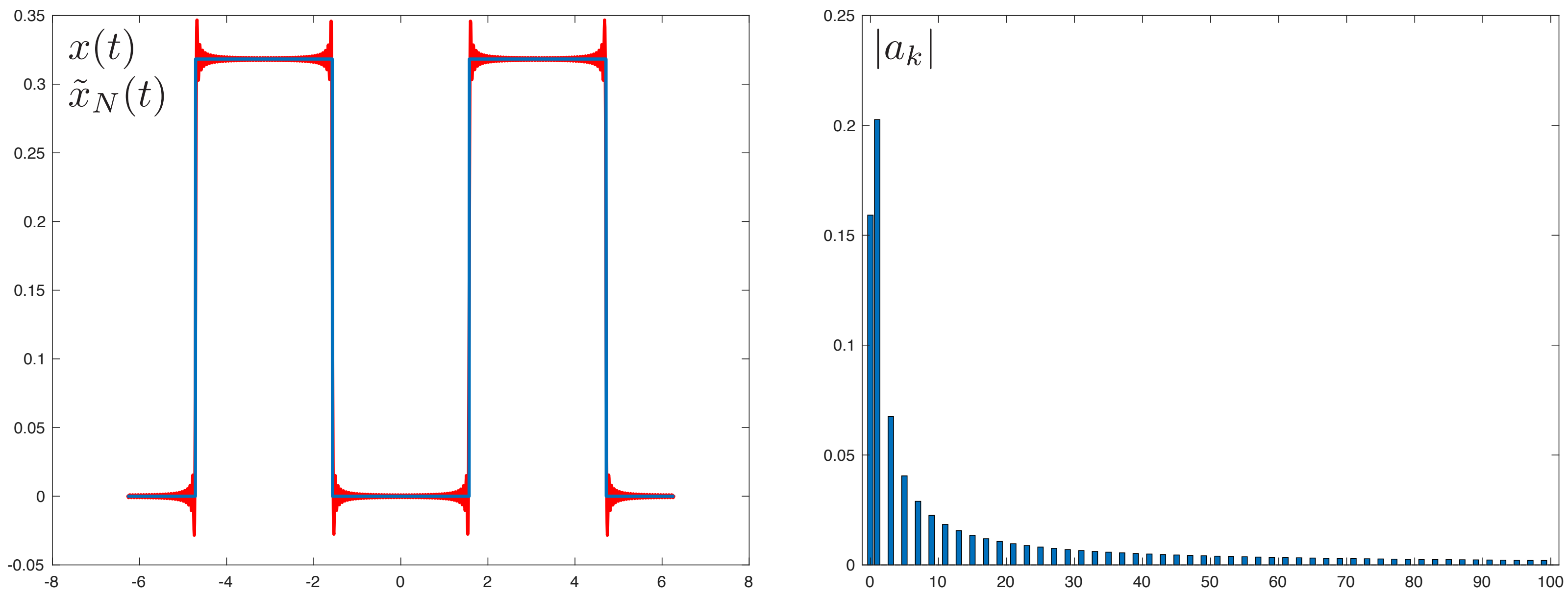




Caractérisation fréquentielle

Série de Fourier

Exercice : reconstruction du signal carré, $k = 0, \ldots, 100$

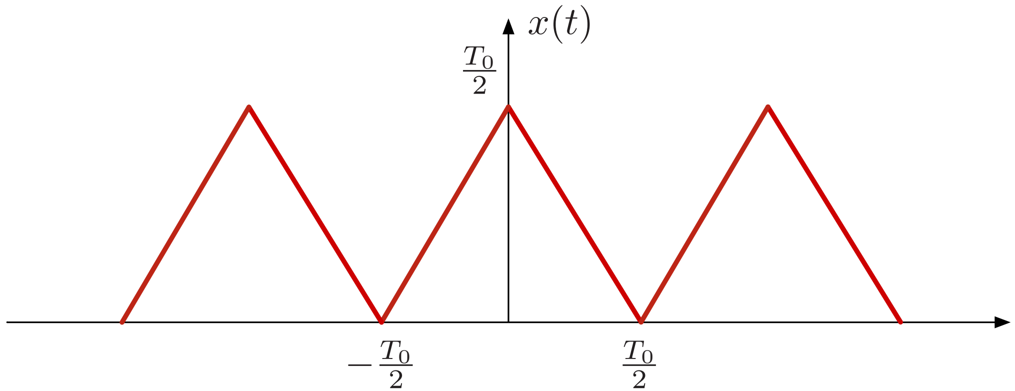


Caractérisation fréquentielle

Série de Fourier

Exercice : signal triangulaire de période T_0

$$x(t) = \begin{cases} \dfrac{T_0}{2} + t, \ \text{si } t \in \left[-\dfrac{T_0}{2}, 0\right] \\ \dfrac{T_0}{2} - t, \ \text{si } t \in \left[0, \dfrac{T_0}{2}\right] \end{cases}$$



Caractérisation fréquentielle

Série de Fourier

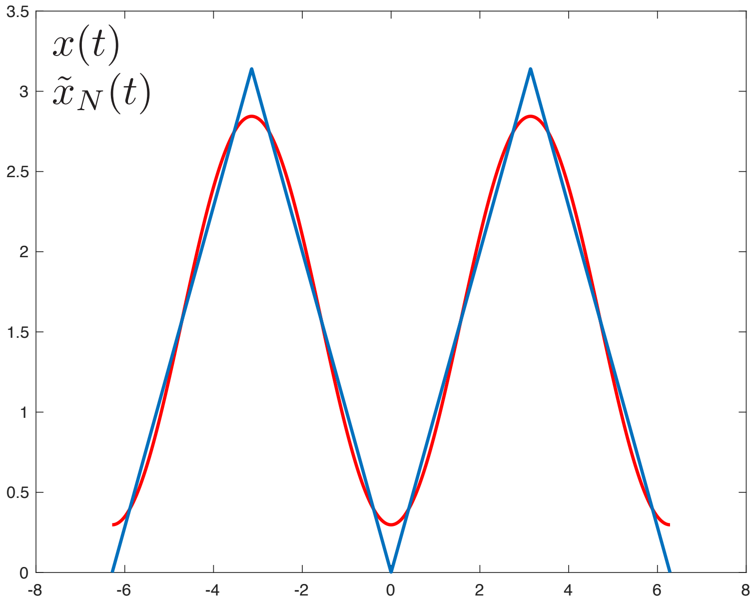
Exercice : signal triangulaire de période T_0

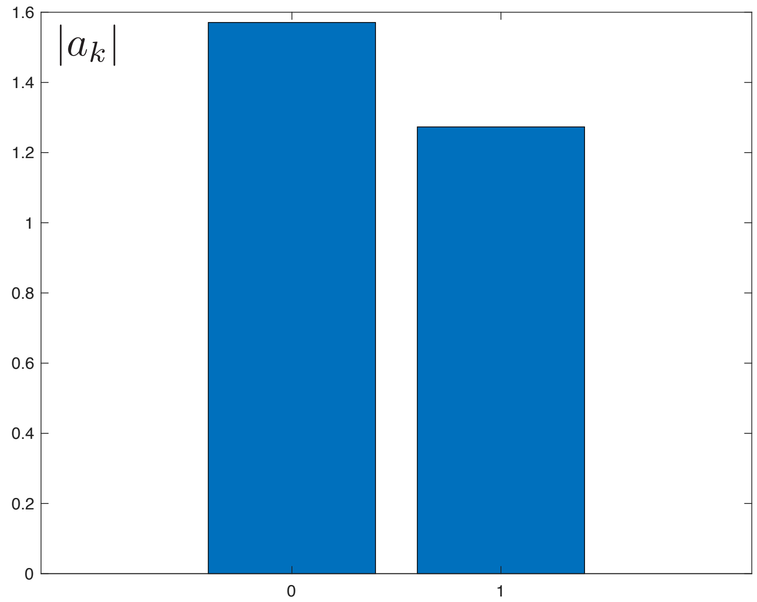
$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{T_0^2}{8} \\
a_k &= \frac{T_0\left[1-(-1)^k\right]}{k^2\pi^2} && k \neq 0 \\
b_k &= 0
\end{aligned}
$$

Caractérisation fréquentielle

Série de Fourier

Exercice : reconstruction du signal triangulaire, $k = 0, 1$

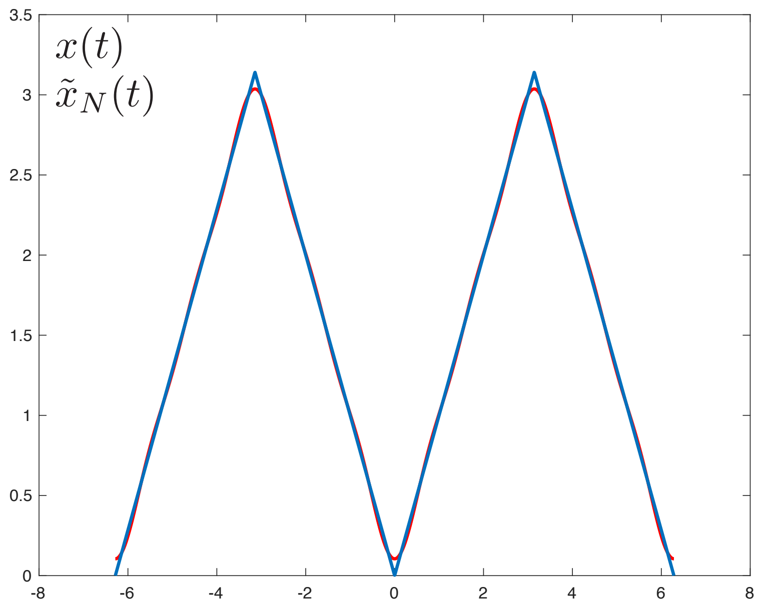


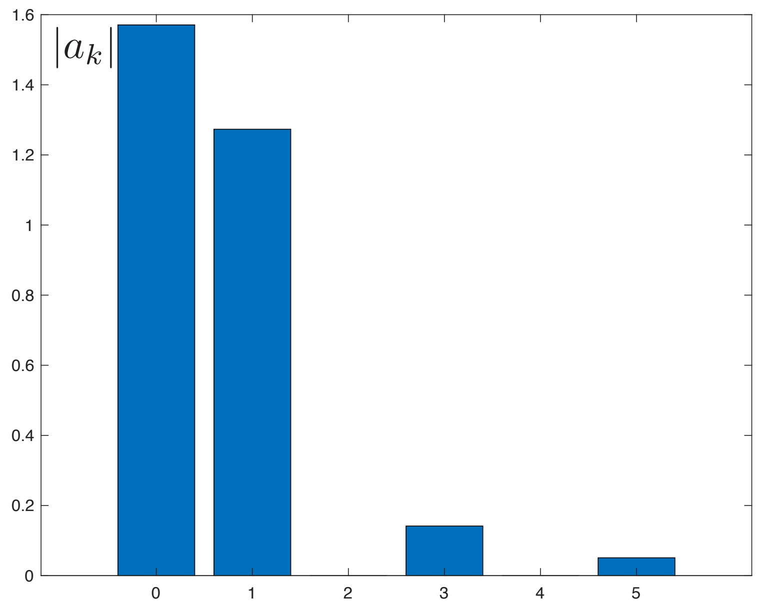


Caractérisation fréquentielle

Série de Fourier

Exercice : reconstruction du signal triangulaire, $k = 0, \ldots, 5$

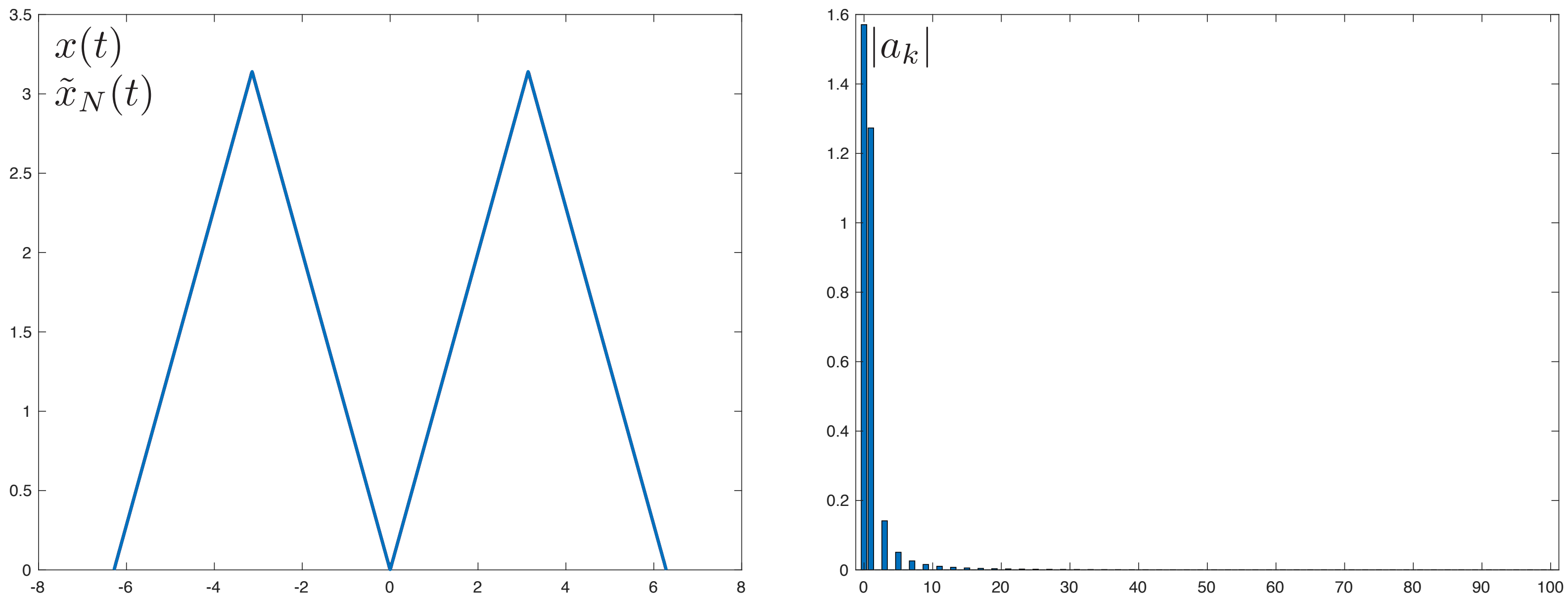




Caractérisation fréquentielle

Série de Fourier

Exercice : reconstruction du signal triangulaire, $k = 0, \ldots, 100$



Caractérisation fréquentielle

Transformée de Fourier

Définition

On appelle transformée de Fourier du signal $x(t)$, si elle existe, la fonction

$$\boxed{X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2j\pi f t} \, dt}$$

On note : $\mathcal{F}[x(t)] = X(f)$

Condition suffisante d'existence

Le signal $x(t)$ est continu par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| \, dt < \infty$$

Caractérisation fréquentielle

Transformée de Fourier inverse

Définition

On appelle transformée de Fourier inverse de $X(f)$, si elle existe, la fonction

$$\boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{2j\pi f t}\, df}$$

On note : $\mathcal{F}^{-1}[X(f)] = x(t)$

Reconstruction

Si $x(t)$ est continu et $\mathcal{F}[x(t)]$ est intégrable, alors

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{F}[x(t)]\right] = x(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Transformée de Fourier

Interprétation

$$\boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{2j\pi f t}\, df}$$

- ▷ $X(f)$ représente $x(t)$ comme une somme pondérée infinie de fonctions exponentielles complexes (mono-fréquentielles) :

$$[X(f)\, df] e^{2j\pi f t}$$

- ▷ $X(f)$ montre comment l'énergie de $x(t)$ se distribue en fréquence, par la contribution infinitésimale $[X(f)\, df]$ de chaque fréquence f

- ▷ La représentation spectrale $X(f)$ s'exprime en module $|X(f)|$ et phase $\varphi(f)$:

$$X(f) = |X(f)| e^{j\varphi(f)}$$

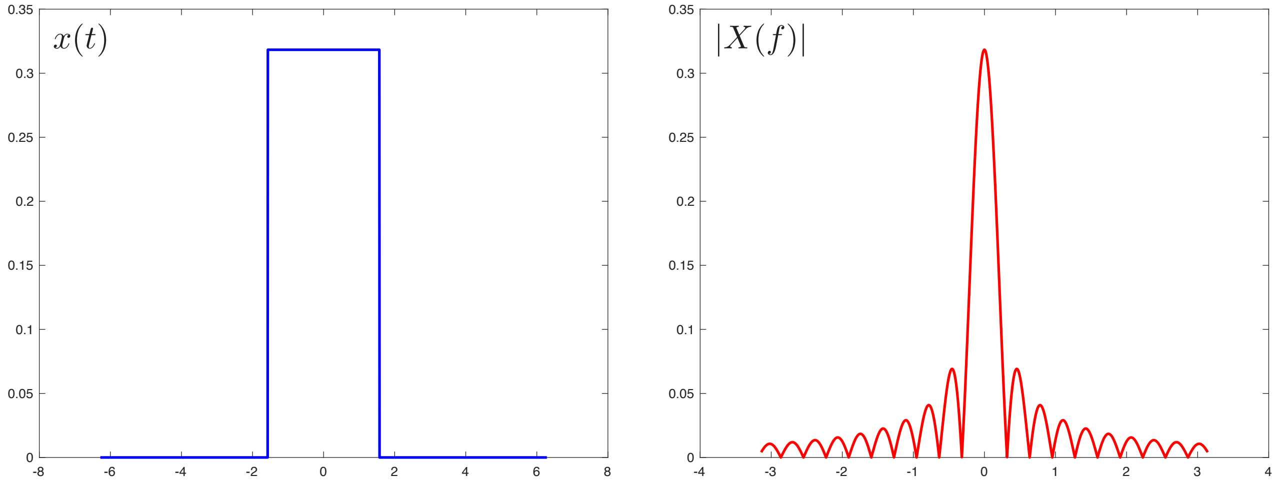
Transformée de Fourier

Exemple

Exemple : $x(t) = \Pi_T(t)$

$$X(f) = \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} = \mathrm{sinc}(\pi f T)$$

La fonction $\mathrm{sinc}(x) \triangleq \frac{\sin x}{x}$ est appelée sinus cardinal

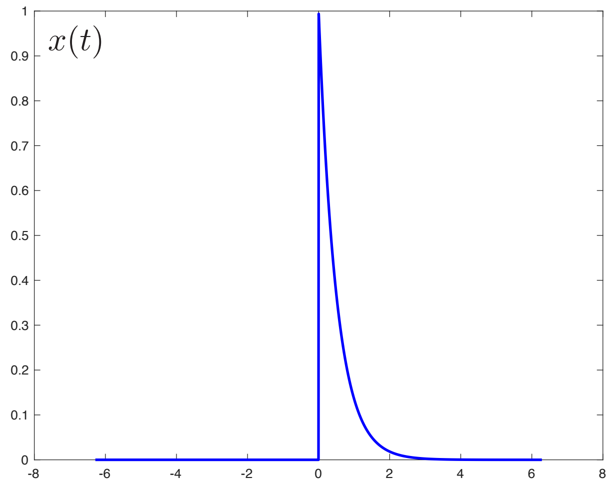


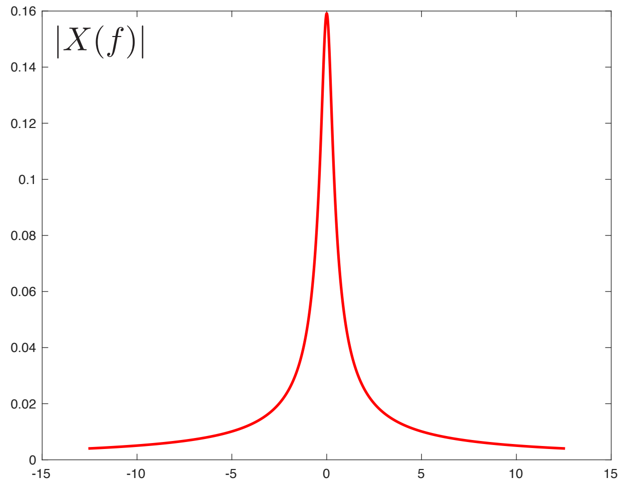
Transformée de Fourier

Exemple

Exemple : $x(t) = e^{-at}\,\Gamma(t), \quad a > 0$

$$X(f) = \frac{1}{a + 2j\pi f} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 4\pi^2 f^2}}\, e^{j\varphi(f)} \quad \text{avec} \quad \varphi(f) = -\tan^{-1}\left(\frac{2\pi f}{a}\right)$$





Transformée de Fourier

Propriétés

Linéarité

Soit $\{x_i(t)\}$ un ensemble de signaux de transformées de Fourier respectives $\{X_i(f)\}$
On a

$$\sum_{i=1}^{N} a_i x_i(t) \longleftrightarrow \sum_{i=1}^{N} a_i X_i(f)$$

Décalage temporel

Soit $x(t)$ un signal dont la transformée de Fourier est $X(f)$. Pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$, on a

$$y(t) = x(t - t_0) \longleftrightarrow Y(f) = e^{-j2\pi t_0 f} X(f)$$

- ▷ le décalage temporel n'affecte que la phase de $X(f)$
- ▷ un déphasage linéaire $t_0 f$ correspond à un retard constant t_0

Transformée de Fourier

Propriétés

Décalage fréquentiel

Soit $x(t)$ un signal dont la transformée de Fourier est $X(f)$. Pour tout $f_0 \in \mathbb{R}$, on a

$$y(t) = e^{j2\pi f_0 t}x(t) \longleftrightarrow Y(f) = X(f - f_0)$$

Une conséquence directe est que

$$y(t) = \cos(2\pi f_0 t)\, x(t) \longleftrightarrow Y(f) = \frac{1}{2}\Big[X(f + f_0)] + X(f - f_0)\Big]$$

Dérivation temporelle

Soit $x(t)$ un signal dont la transformée de Fourier est $X(f)$. On a

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \longleftrightarrow Y(f) = (2j\pi f)X(f)$$

Transformée de Fourier

Propriétés

Intégration

Soit $x(t)$ un signal dont la transformée de Fourier est $X(f)$. On a

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau \longleftrightarrow Y(f) = \frac{1}{2j\pi f} X(f) + \pi X(0)\delta(f)$$

Démonstration

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, \Gamma(t-\tau)\, d\tau = x(t) * \Gamma(t)$$

On utilise alors (voir plus loin)

$$\mathcal{F}[\Gamma(t)] = \frac{1}{2j\pi f} + \pi\, \delta(f)$$

Symétrie

Soit $x(t)$ un signal dont la transformée de Fourier est $X(f)$. On a

$$y(t) = x^*(t) \longleftrightarrow Y(f) = X^*(-f)$$

Conséquences de la symétrie pour les signaux réels

Si $x(t)$ est un signal réel, c'est-à-dire $x(t) = x^*(t)$, alors

$$X(-f) = X^*(f)$$

En notant $X(f) = \mathrm{Re}[X(f)] + j\,\mathrm{Im}[X(f)]$, cela signifie

$$\mathrm{Re}[X(-f)] = \mathrm{Re}[X(f)] \Rightarrow \mathrm{Re}[X(f)] \text{ est pair}$$

$$\mathrm{Im}[X(-f)] = -\mathrm{Im}[X(f)] \Rightarrow \mathrm{Im}[X(f)] \text{ est impair}$$

En notant $X(f) = |X(f)|\, e^{j\varphi(f)}$, cela signifie

$$|X(-f)| = |X(f)| \Rightarrow |X(f)| \text{ est pair}$$

$$\varphi(-f) = -\varphi(f) \Rightarrow \varphi(f) \text{ est impaire}$$

Transformée de Fourier

Propriétés

Changement d'échelle

Soit $x(t)$ un signal dont la transformée de Fourier est $X(f)$. Pour tout $a \in \mathbb{R}^*$, on a

$$y(t) = x(at) \longleftrightarrow Y(f) = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right)$$

- ▷ une contraction en temps induit une expansion en fréquence
- ▷ une expansion en temps induit une contraction en fréquence

Transformée de Fourier

Propriétés

Conséquence de la relation de changement d'échelle et de la symétrie

Par la relation de changement d'échelle, on a toujours

$$y(t) = x(-t) \longleftrightarrow Y(f) = X(-f)$$

Par la relation de symétrie pour les signaux réels, on a $X(-f) = X^*(f)$

Si $x(t)$ est un signal réel et pair, on a donc

$$X(f) = X(-f) = X^*(f)$$

La transformée d'un signal réel et pair est donc réelle et paire

Si $x(t)$ est un signal réel et impair, on a donc

$$X(-f) = -X(f) = X^*(f)$$

La transformée d'un signal réel et impair est donc imaginaire et impaire

Transformée de Fourier

Exemple

Calculer la transformée de Fourier suivante :

$$
\begin{aligned}
x(t) = e^{-a|t|} &= e^{at}\,\Gamma(-t) + e^{-at}\,\Gamma(t) \\
&= x_1(-t) + x_1(t) \\
&= x_2(t) + x_1(t)
\end{aligned}
$$

$$
X_1(f) = \frac{1}{a + 2j\pi f} \qquad X_2(f) = X_1(-f) = \frac{1}{a - 2j\pi f}
$$

Ainsi, on aboutit à

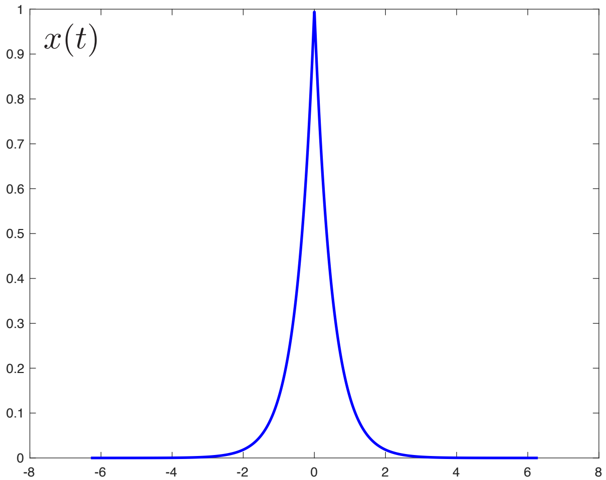
$$
X(f) = \frac{1}{a + 2j\pi f} + \frac{1}{a - 2j\pi f} = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}
$$

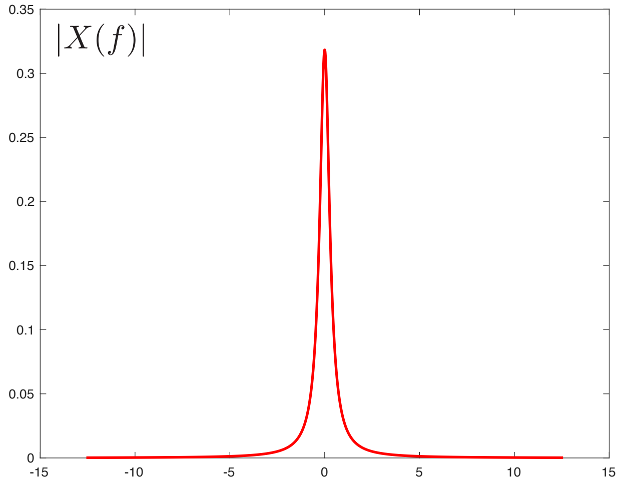
Transformée de Fourier

Exemple

$$x(t) = e^{-a|t|}$$

$$X(f) = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$$





Dualité

Soit $x(t)$ un signal dont la transformée de Fourier est $X(f)$.
En utilisant la définition de la transformée de Fourier inverse, on peut écrire

$$x(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f(-t)} df = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{-j2\pi f t} df$$

On en déduit la relation de dualité suivante

$$x(t) \longleftrightarrow X(f)$$

$$X(t) \longleftrightarrow x(-f)$$

<u>Exemple</u>

Si $\mathcal{F}[\Pi_T(t)] = \mathrm{sinc}(\pi f T)$, on en déduit : $\mathcal{F}[\mathrm{sinc}(\pi t T)] = \Pi_T(-f) = \Pi_T(f)$

Transformée de Fourier

Propriétés

Produit de convolution

Soit $x_1(t)$ et $x_2(t)$ deux signaux de transformées de Fourier $X_1(f)$ et $X_2(f)$

$$x_1(t) * x_2(t) \longleftrightarrow X_1(f)\, X_2(f)$$

$$x_1(t)\, x_2(t) \longleftrightarrow X_1(f) * X_2(f)$$

Relation de Parseval

Soit $x(t)$ une signal de transformée de Fourier $X(f)$. On a

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 \, df$$

Transformée de Fourier

Exemple

Impulsion de Dirac : $x(t) = \delta(t)$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, e^{-2j\pi f t}\, dt = 1$$

En conséquence, on en déduit

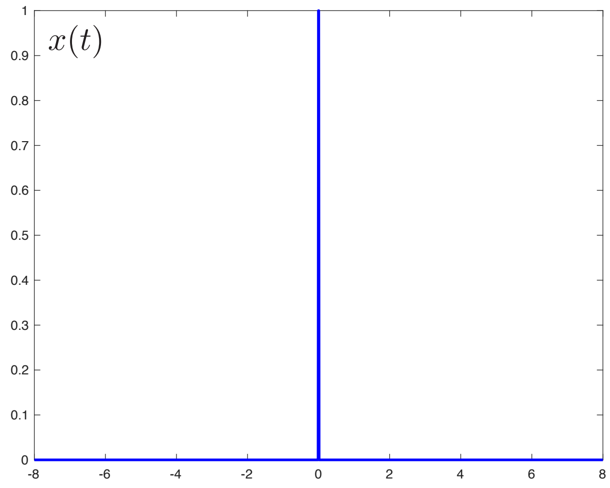
$$\delta(t) \longleftrightarrow 1$$

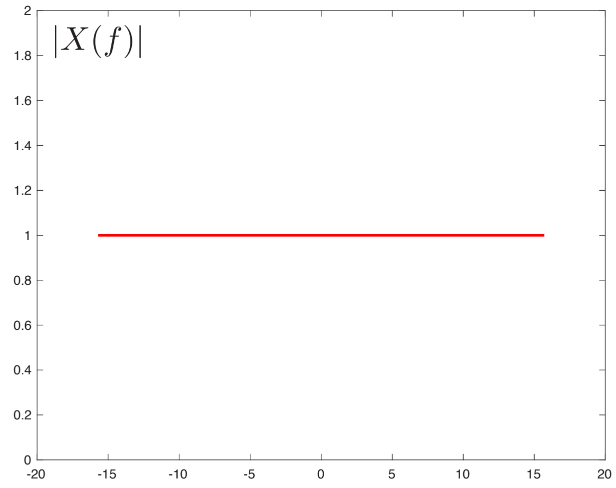
$$\delta(t - t_0) \longleftrightarrow e^{-2j\pi f t_0}$$

Transformée de Fourier

Exemple

Impulsion de Dirac : $x(t) = \delta(t)$





Transformée de Fourier

Exemple

Exponentielle complexe : $x(t) = e^{j2\pi f_0 t}$

$$
\begin{aligned}
\delta(t) &\longleftrightarrow 1 \\
1 &\longleftrightarrow \delta(f) \\
e^{j2\pi f_0 t} &\longleftrightarrow \delta(f - f_0)
\end{aligned}
$$

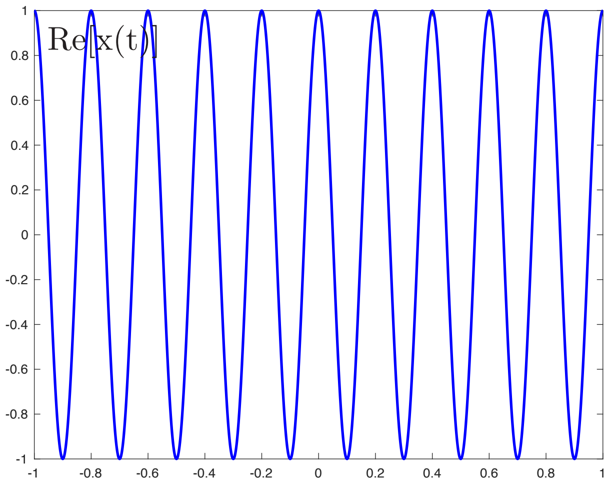
En conséquence, on en déduit

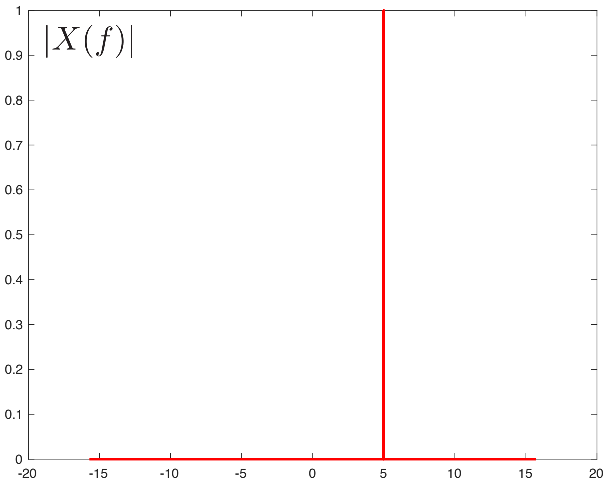
$$
\begin{aligned}
\cos(2\pi f_0 t) &= \frac{1}{2}\left[e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}\right] \longleftrightarrow \frac{1}{2}\left[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\right] \\
\sin(2\pi f_0 t) &= \frac{1}{2j}\left[e^{j2\pi f_0 t} - e^{-j2\pi f_0 t}\right] \longleftrightarrow \frac{1}{2j}\left[\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)\right]
\end{aligned}
$$

Transformée de Fourier

Exemple

Exponentielle complexe : $x(t) = e^{j2\pi f_0 t} \longleftrightarrow X(f) = \delta(f - f_0)$

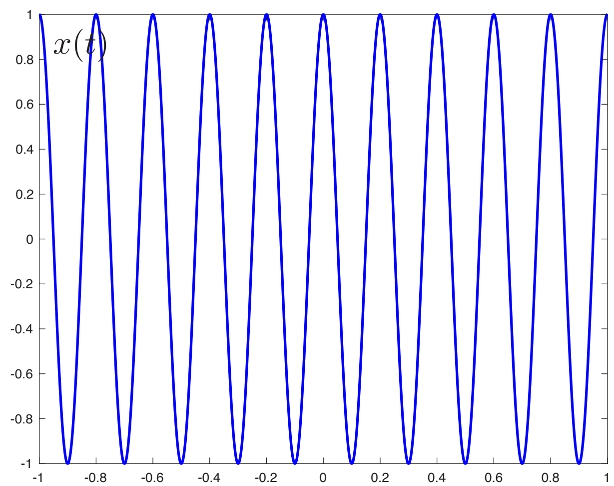


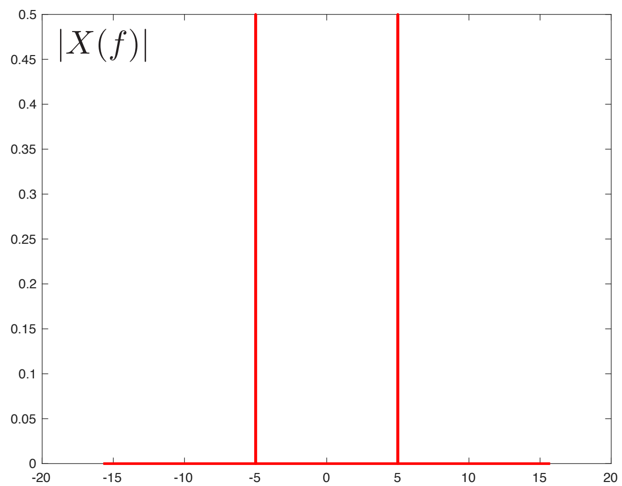


Transformée de Fourier

Exemple

Cosinus : $x(t) = \cos(2\pi f_0 t) \longleftrightarrow X(f) = \frac{1}{2}\Big[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\Big]$

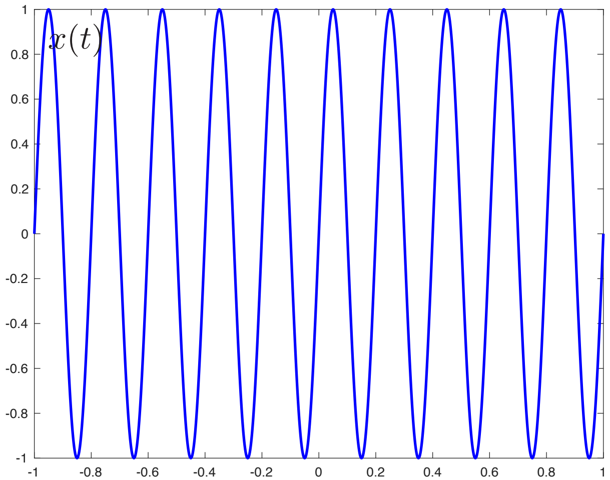


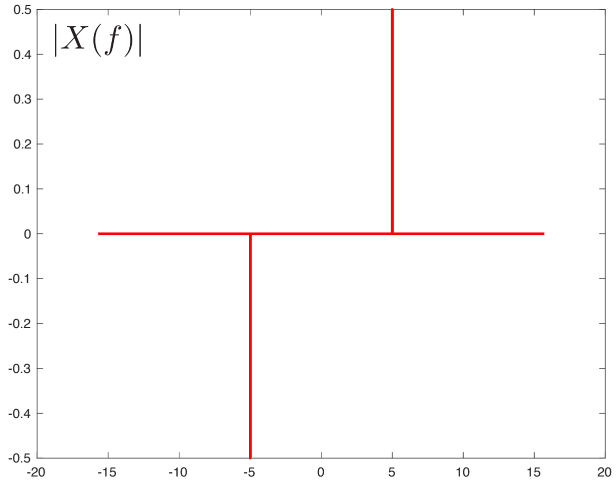


Transformée de Fourier

Exemple

Sinus : $x(t) = \sin(2\pi f_0 t) \longleftrightarrow X(f) = \frac{1}{2j}\Big[\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)\Big]$



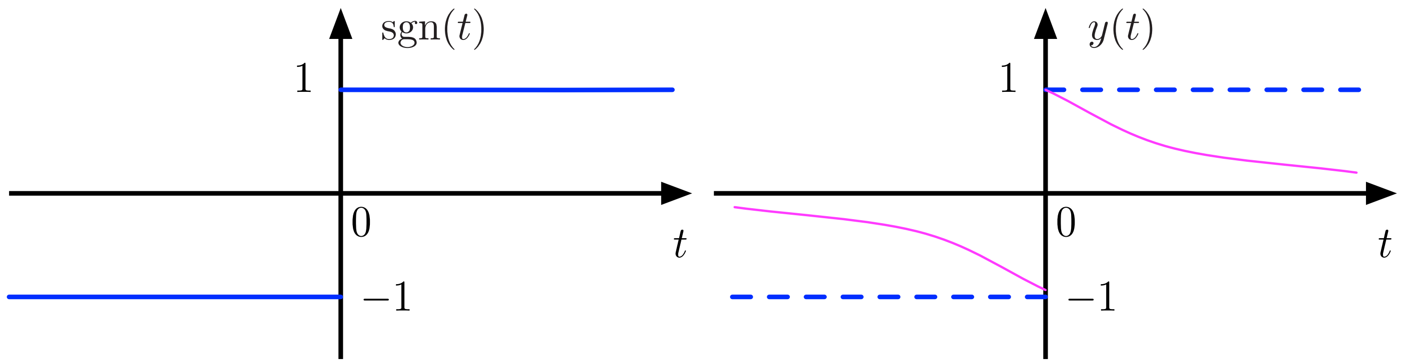


Transformée de Fourier

Exemple

Fonction signe : $x(t) = \text{sgn}(t)$

$$\begin{aligned}\text{sgn}(t) &= \lim_{a\to 0}[-e^{at}\Gamma(-t) + e^{-at}\Gamma(t)], \qquad a \geq 0 \\ &= \lim_{a\to 0} y(t)\end{aligned}$$



Fonction signe : $x(t) = \mathrm{sgn}(t)$

$$
\begin{aligned}
Y(f) &= -\int_{-\infty}^{0} e^{at} e^{-j2\pi f t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-at} e^{-j2\pi f t} dt \\
&= -\frac{1}{a - j2\pi f} + \frac{1}{a + j2\pi f} \\
&= \frac{-j4\pi f}{a^2 + 4\pi^2 f^2}
\end{aligned}
$$

$$
x(t) = \mathrm{sgn}(t) \longleftrightarrow X(f) = \lim_{a \to 0} Y(f) = \frac{1}{j\pi f}
$$

Transformée de Fourier

Exemple

Échelon d'Heaviside : $x(t) = \Gamma(t)$

$$\begin{aligned} x(t) &= \Gamma(t) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{sgn}(t) \end{aligned}$$

$$x(t) = \Gamma(t) \longleftrightarrow X(f) = \frac{\delta(f)}{2} + \frac{1}{j2\pi f}$$