Signaux et Systèmes

Systèmes linéaires invariants dans le temps

Cédric RICHARD
Université Côte d'Azur

Systèmes linéaires invariants dans le temps

Définition

Propriétés (rappel)

- linéarité

$$\left.\begin{array}{l} x_1(t) \to y_1(t) \\ x_2(t) \to y_2(t) \end{array}\right\} \Rightarrow a_1\, x_1(t) + a_2\, x_2(t) \to a_1\, y_1(t) + a_2\, y_2(t)$$

- invariance dans le temps

$$x(t) \to y(t) \Rightarrow x(t - t_0) \to y(t - t_0)$$

Applications nombreuses

- électronique
- mécanique
- optique
- acoustique
- etc.

Systèmes linéaires invariants dans le temps

Classe particulière

Équations différentielles linéaires à coefficients constants

$$\begin{aligned}\frac{d^N y(t)}{dt^N} + a_1 \frac{d^{N-1} y(t)}{dt^{N-1}} + \ldots + a_{N-1} \frac{dy(t)}{dt} + a_N y(t) \\ = b_0 \frac{d^M x(t)}{dt^M} + b_1 \frac{d^{M-1} x(t)}{dt^{M-1}} + \ldots + b_{M-1} \frac{dx(t)}{dt} + b_M x(t)\end{aligned}$$

Remarque

Tous les SLIT ne s'expriment pas sous la forme d'une équation différentielle

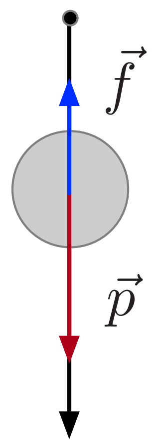
Exemple :

$$y(t) = x(t - t_0)$$

Systèmes linéaires invariants dans le temps

Exemple : chute de corps

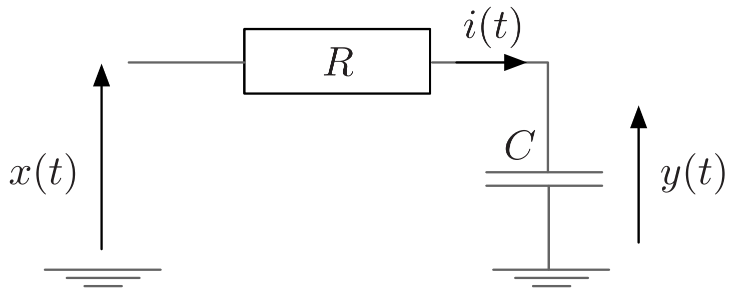
Chute d'un corps de poids $\vec{p} = m\vec{g}$ soumis à une force de frottement $\vec{f} = \rho\vec{v}(t)$ proportionnelle à la vitesse $\vec{v}(t)$



$$m\frac{dv(t)}{dt} = mg - \rho v(t)$$

Systèmes linéaires invariants dans le temps

Exemple : circuit RC



$$
\left.
\begin{aligned}
& x(t) = R\, i(t) + y(t) \\
& y(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)\, d\tau \Rightarrow i(t) = C\,\frac{dy(t)}{dt}
\end{aligned}
\right\} \rightarrow x(t) = RC\,\frac{dy(t)}{dt} + y(t)
$$

Systèmes linéaires invariants dans le temps

Résolution

$$\frac{d^N y(t)}{dt^N} + a_1 \frac{d^{N-1} y(t)}{dt^{N-1}} + \ldots + a_{N-1} \frac{dy(t)}{dt} + a_N y(t)$$
$$= b_0 \frac{d^M x(t)}{dt^M} + b_1 \frac{d^{M-1} x(t)}{dt^{M-1}} + \ldots + b_{M-1} \frac{dx(t)}{dt} + b_M x(t)$$

Solution en 2 parties :

- $y_h(t)$: solution de l'équation homogène, obtenue pour $x(t) = 0$
- $y_p(t)$: solution particulière

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

avec des constantes déterminées grâce aux conditions auxiliaires

Systèmes linéaires invariants dans le temps

Exemple de résolution

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t) \text{ avec } x(t) = Ke^{3t}\Gamma(t)$$

Solution particulière : $y_p(t) = Ye^{3t}$ pour $t > 0$

En remplaçant dans l'équation initiale, on aboutit à : $3Ye^{3t} + 2Ye^{3t} = Ke^{3t}$
En conséquence :

$$y_p(t) = \frac{K}{5}e^{3t}, \quad t > 0$$

Systèmes linéaires invariants dans le temps

Exemple de résolution

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t) \text{ avec } x(t) = Ke^{3t}\Gamma(t)$$

Solution de l'équation homogène : $\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 0$

On fait l'hypothèse que la solution est de la forme : $y_h(t) = Ae^{st}$
En remplaçant dans l'équation initiale, on aboutit à : $Ae^{st}(s+2) = 0$
En conséquence, on doit prendre $s = -2$ et on trouve :

$$y_h(t) = Ae^{-2t}, \quad t > 0$$

Systèmes linéaires invariants dans le temps

Exemple de résolution

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t) \text{ avec } x(t) = Ke^{3t}\Gamma(t)$$

Solution de l'équation différentielle : $y(t) = Ae^{-2t} + \frac{K}{5}e^{3t}$ pour $t > 0$

Pour déterminer A, il faut utiliser une condition auxiliaire : $y(0) = 0$
On aboutit à : $A = -\frac{K}{5}$

Finalement, la solution de l'équation est donnée par :

$$y(t) = \frac{K}{5}\left(e^{3t} - e^{-2t}\right)\Gamma(t)$$

Systèmes linéaires invariants dans le temps

Résolution dans le cas général

$$\frac{d^N y(t)}{dt^N} + a_1 \frac{d^{N-1} y(t)}{dt^{N-1}} + \ldots + a_{N-1} \frac{dy(t)}{dt} + a_N y(t)$$
$$= b_0 \frac{d^M x(t)}{dt^M} + b_1 \frac{d^{M-1} x(t)}{dt^{M-1}} + \ldots + b_{M-1} \frac{dx(t)}{dt} + b_M x(t)$$

Solution de l'équation homogène :

Nécessite la recherche des N racines $\{s_k\}_{k=1}^N$ du polynôme caractéristique

$$s^N + a_1 s^{N-1} + \ldots + a_{N-1} s + a_N = 0$$

La solution de l'équation homogène s'écrit alors

$$y_h(t) = c_1 e^{s_1 t} + \ldots + c_N e^{s_N t}$$

où $\{c_k\}_{k=1}^N$ sont des constantes à déterminer à partir de N conditions auxiliaires

Systèmes linéaires invariants dans le temps

Résolution dans le cas général

$$\frac{d^N y(t)}{dt^N} + a_1 \frac{d^{N-1} y(t)}{dt^{N-1}} + \ldots + a_{N-1} \frac{dy(t)}{dt} + a_N y(t)$$
$$= b_0 \frac{d^M x(t)}{dt^M} + b_1 \frac{d^{M-1} x(t)}{dt^{M-1}} + \ldots + b_{M-1} \frac{dx(t)}{dt} + b_M x(t)$$

Solution de l'équation :
Après avoir déterminer une solution particulière, la solution $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$ est finalement élaborée en répondant à N conditions auxiliaires, par exemple du type

$$\frac{d^N y(t_0)}{dt^N} = \frac{d^{N-1} y(t_0)}{dt^{N-1}} = \ldots = \frac{dy(t_0)}{dt} = 0$$

Systèmes linéaires invariants dans le temps

Limites du modèle différentiel

Afin de définir une technique de modélisation performante, deux remarques s'imposent. On souhaite pouvoir :

- ▷ calculer aisément la réponse du système pour une entrée quelconque afin d'en analyser les performances
- ▷ prendre facilement en compte, dans le modèle, des modifications de modélisation de composants

La modélisation d'un SLIT sous forme différentielle n'est pas adaptée

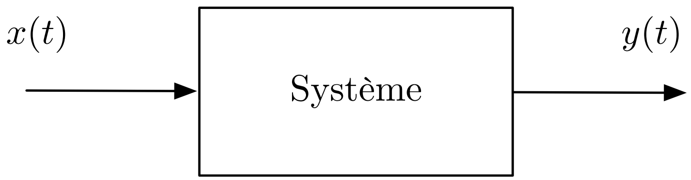
Représentation d'un signal par des impulsions

Compte tenu des propriétés de l'impulsion de Dirac, on peut toujours écrire

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau$$

Systèmes linéaires invariants dans le temps

Réponse impulsionnelle



$\delta(t)$	$\longrightarrow$	$h(t)$	réponse à une impulsion (notation)
$\delta(t-\tau)$	$\longrightarrow$	$h(t-\tau)$	invariance dans le temps
$x(\tau)\,\delta(t-\tau)$	$\longrightarrow$	$x(\tau)\,h(t-\tau)$	linéarité
$\int x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau$	$\longrightarrow$	$\int x(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau$	linéarité

$$x(t) \qquad \longrightarrow \qquad \underbrace{y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau}_{\text{produit de convolution}}$$

Systèmes linéaires invariants dans le temps

Produit de convolution

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$$

Commutativité

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)\,d\tau$$

Notation

$$y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$

Systèmes linéaires invariants dans le temps

Réponse impulsionnelle et produit de convolution

Réponse impulsionnelle

Un SLIT est défini par sa réponse impulsionnelle $h(t)$, qui est la réponse $y(t)$ du système à une impulsion $x(t) = \delta(t)$

Produit de convolution

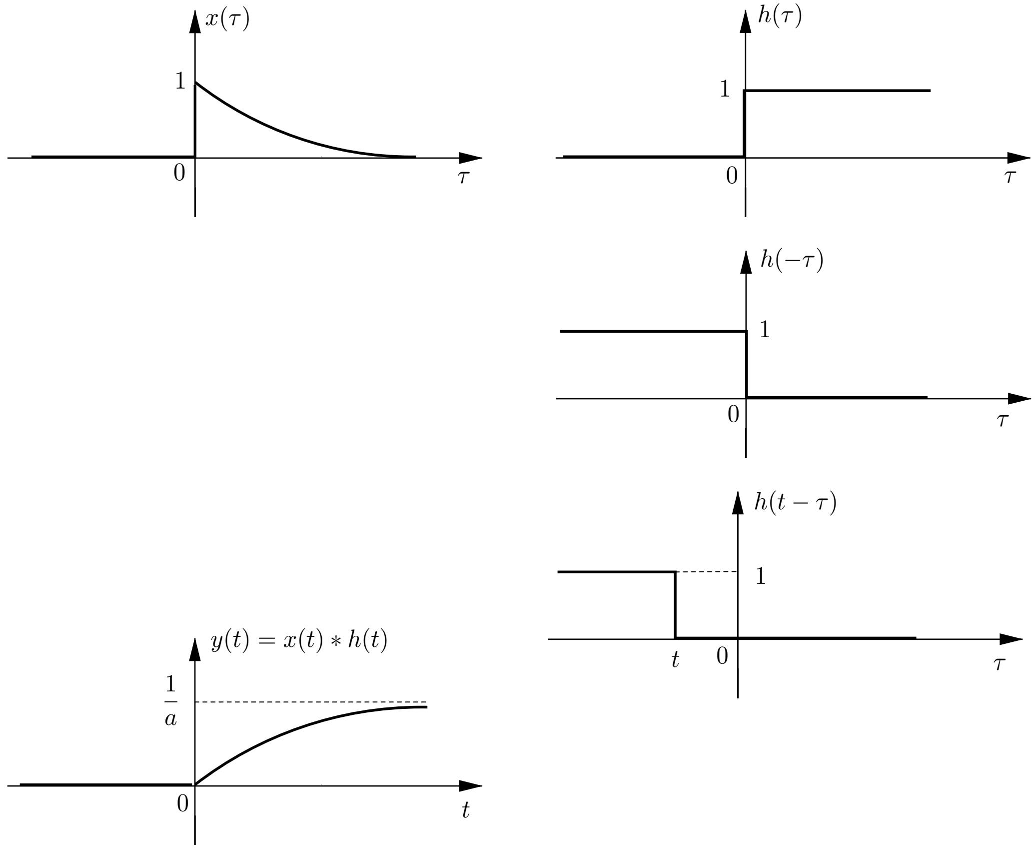
Le produit de convolution est l'opération qui fournie la sortie $y(t)$ d'un SLIT à partir de son entrée $x(t)$

$$y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$

Systèmes linéaires invariants dans le temps

Exemple

$x(t) = e^{-at}\Gamma(t)$ avec $a > 0$; $h(t) = \Gamma(t)$



Solution analytique

$$h(t) = \Gamma(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

$$h(t-\tau) = \Gamma(t-\tau) = \begin{cases} 1, & t-\tau > 0 \quad \text{i.e.} \quad \tau < t \\ 0, & t-\tau < 0 \quad \text{i.e.} \quad \tau > t \end{cases}$$

$$x(\tau)\, h(t-\tau) = \begin{cases} e^{-a\tau}, & 0 < \tau < t \quad \text{car} \quad x(\tau) = 0 \text{ pour } \tau < 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Systèmes linéaires invariants dans le temps

Exemple

Solution analytique (suite)

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = \int_{0}^{t} e^{-a\tau} d\tau, \quad t > 0$$

$$y(t) = -\frac{1}{a} e^{-a\tau} \bigg|_{0}^{t} = -\frac{1}{a}(e^{-at} - 1), \quad t > 0$$

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{a}\left(1 - e^{-at}\right)\Gamma(t)}$$

Systèmes linéaires invariants dans le temps

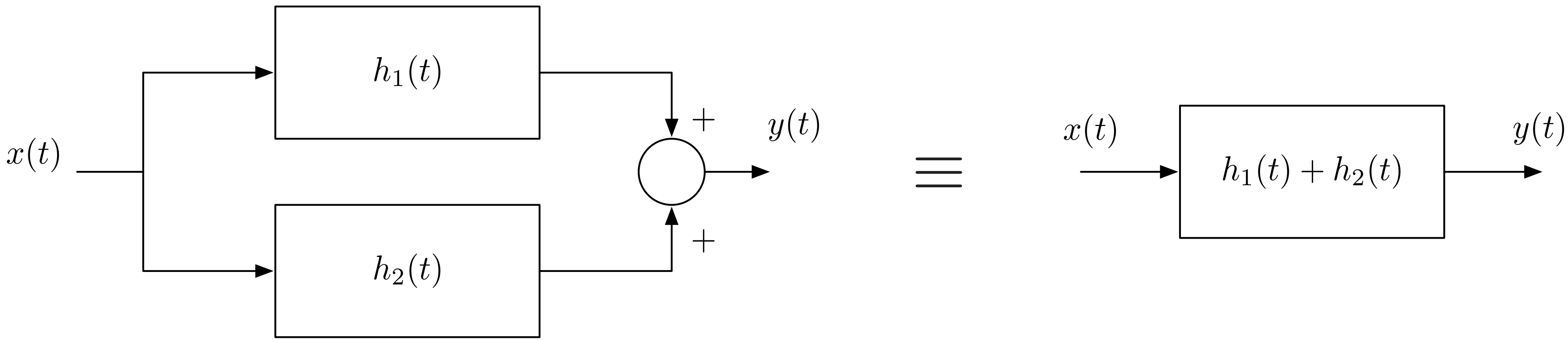
Propriétés

Commutativité

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$

Distributivité

$$x(t) * [h_1(t) + h_2(t)] = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$$

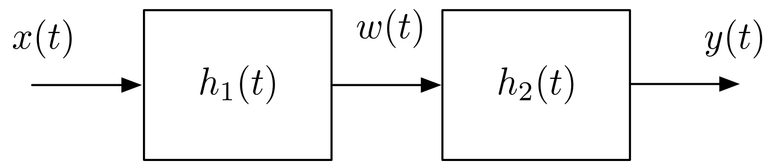


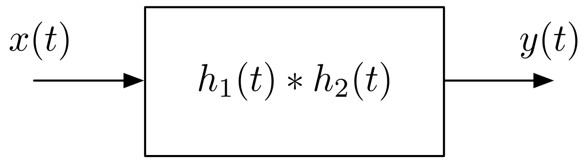
Systèmes linéaires invariants dans le temps

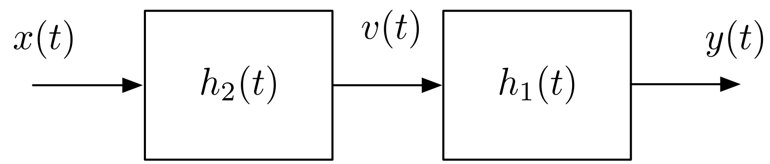
Propriétés

Associativité

$$x(t) * [h_1(t) * h_2(t)] = [x(t) * h_1(t)] * h_2(t) = x(t) * h_1(t) * h_2(t)$$







Systèmes linéaires invariants dans le temps

Propriétés

SLIT sans mémoire

Pour que le système sans mémoire, il faut

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{h(\tau)x(t-\tau)}_{\text{avec } h(\tau)=0,\ \forall\tau\neq 0} \, d\tau = K\,x(t), \quad \forall\, x(t) \text{ et } K = \text{cte}$$

Un SLIT est sans mémoire si :

$$h(t) = K\delta(t)$$

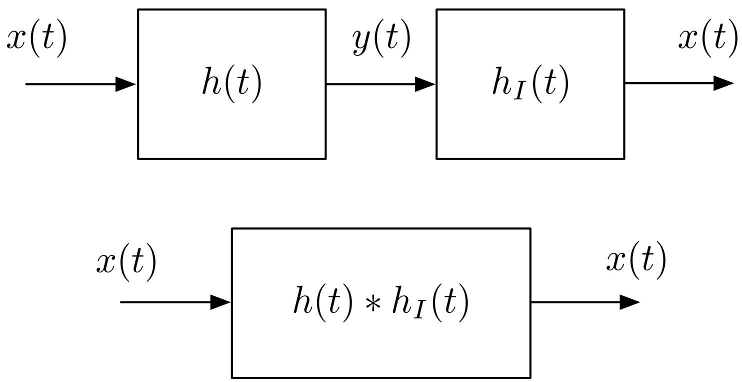
Systèmes linéaires invariants dans le temps

Propriétés

SLIT inversible

$h(t)$: réponse impulsionnelle du système

$h_I(t)$: réponse impulsionnelle du système inverse



Un SLIT de réponse impulsionnelle $h(t)$ est inversible s'il existe $h_I(t)$ telle que :

$$h(t) * h_I(t) = \delta(t)$$

Systèmes linéaires invariants dans le temps

Propriétés

SLIT inversible (exemple)

$y(t) = x(t - t_0)$ (système à retard idéal)

Puisque $x(t - t_0) = x(t) * \delta(t - t_0)$, on en déduit que $h(t) = \delta(t - t_0)$

Convoluer $x(t)$ par une impulsion translate $x(t)$ vers l'instant auquel l'impulsion se produit. À partir de cela, on en déduit la réponse impulsionnelle du système inverse

Le système inverse doit vérifier $h_I(t) * y(t) = h_I(t) * x(t - t_0) = x(t)$
On en déduit donc

$$h_I(t) = \delta(t + t_0)$$

SLIT causal

En $t = t_0$

$$y(t_0) = x(t) * h(t)\Big|_{t=t_0} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t_0 - \tau)\, d\tau$$

Pour que $y(t_0)$ ne dépende pas de $x(t)$ lorsque $t > t_0$, il faut que

$$h(t_0 - \tau) = 0 \quad \text{pour} \quad \tau > t_0$$

Par le changement de variable $t = t_0 - \tau$, on obtient le résultat suivant

Un SLIT de réponse impulsionnelle $h(t)$ est causal si :

$$h(t) = 0, \quad t < 0$$

Systèmes linéaires invariants dans le temps

Propriétés

Stabilité (BIBO)

On considère un signal $x(t)$ borné, i.e., il existe B fini tel que $\big|x(t)\big| \leq B, \quad \forall t$

Le système est stable si $|y(t)| < \infty, \quad \forall t$

$$\begin{aligned} |y(t)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)\,d\tau \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)x(t-\tau)|\,d\tau \\ &\leq B \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|\,d\tau < \infty \end{aligned}$$

Puisque $B < \infty$, on en déduit le résultat

Un SLIT est stable si sa réponse impulsionnelle $h(t)$ est absolument sommable :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt < \infty$$

Réponse impulsionnelle vs réponse à un échelon d'Heaviside

On adopte les notations suivantes

$$\begin{array}{lcll} \delta(t) & \longrightarrow & h(t) & \text{réponse à une impulsion} \\ \Gamma(t) & \longrightarrow & s(t) & \text{réponse à un échelon d'Heaviside} \end{array}$$

$$s(t) = \Gamma(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\Gamma(t-\tau)\, d\tau$$

Puisque $\Gamma(t-\tau) = 0$ pour $\tau > t$ et $\Gamma(t-\tau) = 1$ sinon, on en déduit successivement les résultats suivants

$$s(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\, d\tau$$

$$h(t) = \frac{ds(t)}{dt}$$