Signaux et Systèmes

Systèmes : définitions et propriétés élémentaires

Cédric RICHARD
Université Côte d'Azur

Systèmes

Définition

Un **système** est défini par une opération appliquée à un signal d'entrée $x(t)$ conduisant à un signal de sortie $y(t)$:

- ▷ en vue de répondre à un objectif donné
- ▷ pour faciliter l'extraction d'informations
- ▷ auquel les transformations apportées sont indésirables

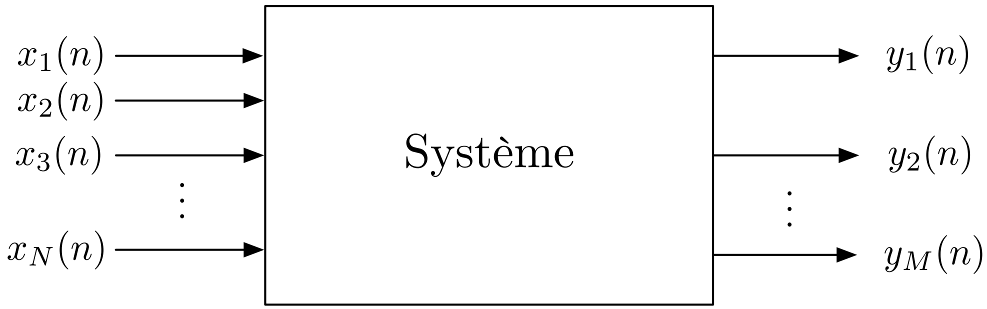
Un **système** peut être implanté de façon :

- ▷ hardware (composants physiques)
- ▷ software (algorithmes numériques)

Systèmes

Représentation

Représentation par blocs (entrée/sortie) :



L'étude des systèmes comprend :

- ▷ modélisation mathématique
- ▷ analyse
- ▷ synthèse

Systèmes

Classification des systèmes

Linéarité

$$\left.\begin{array}{l} x_1(t) \rightarrow y_1(t) \\ x_2(t) \rightarrow y_2(t) \end{array}\right\} \Rightarrow a_1\, x_1(t) + a_2\, x_2(t) \rightarrow a_1\, y_1(t) + a_2\, y_2(t)$$

Exemple : $y(t) = 2\,t\,x(t-1)$

$$x_1(t) \to y_1(t) = 2\,t\,x_1(t-1)$$
$$x_2(t) \to y_2(t) = 2\,t\,x_2(t-1)$$

En conséquence :

$$\begin{aligned} a_1\,x_1(t) + a_2\,x_2(t) &\to 2\,t\,[a_1\,x_1(t-1) + a_2\,x_2(t-1)] \\ &= a_1\,y_1(t) + a_2\,y_2(t) \end{aligned}$$

Le système considéré est donc **linéaire**

Systèmes

Classification des systèmes : systèmes linéaires

Exemple : $y(t) = x^2(t)$

$$x_1(t) \to y_1(t) = x_1^2(t)$$
$$x_2(t) \to y_2(t) = x_2^2(t)$$

En conséquence :

$$\begin{aligned} a_1\, x_1(t) + a_2\, x_2(t) \to & \left[a_1\, x_1(t) + a_2\, x_2(t)\right]^2 \\ & \neq a_1\, y_1(t) + a_2\, y_2(t) \end{aligned}$$

Le système considéré est donc **non-linéaire**

Invariance dans le temps

$$x(t) \rightarrow y(t) \Rightarrow x(t - t_0) \rightarrow y(t - t_0)$$

Exemple : $y(t) = \sin(x(t))$

$$x(t) \rightarrow y(t) = \sin(x(t))$$

$$x_1(t) = x(t - t_0) \rightarrow y_1(t) = \sin(x(t - t_0)) = y(t - t_0)$$

Le système considéré est **invariant dans le temps**

Systèmes

Classification des systèmes : systèmes invariants dans le temps

Exemple : $y(t) = \sin(t)\, x(t-2)$

$$x(t) \to y(t) = \sin(t)\, x(t-2)$$

$$x_1(t) = x(t-t_0) \to y_1(t) = \sin(t)\, x(t-t_0-2) \neq y(t-t_0)$$

$$\text{car } y(t-t_0) = \sin(t-t_0)\, x(t-t_0-2)$$

Le système considéré n'est donc **pas invariant dans le temps**

Systèmes

Classification des systèmes

Système instantané (ou sans mémoire)

$$y(t_0) \text{ dépend } \textbf{exclusivement} \text{ de } x(t_0)$$

Exemple : $y(t) = (t-3)\,x(t)$

$$y(t_0) = (t_0 - 3)\,x(t_0)$$

Puisque $y(t_0)$ depend de $x(t)$ seulement en $t = t_0$, le système est **sans mémoire**

Exemple : $y(t) = (t-3)\,x(t+1)$

$$y(t_0) = (t_0 - 3)\,x(t_0 + 1)$$

Puisque $y(t_0)$ depend de $x(t_0+1)$, le système est **avec mémoire**

Systèmes

Classification des systèmes : systèmes sans/avec mémoire

Exemple : résistance constante (sans mémoire)

$$v(t) = R\, i(t) \qquad \text{entrée : } i(t) \quad \text{sortie : } v(t)$$

$$i(t) = G\, v(t) \qquad \text{entrée : } v(t) \quad \text{sortie : } i(t)$$

Exemple : capacité constante (avec mémoire)

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t} i(\tau)\, d\tau$$

Système causal

$$y(t_0) \text{ dépend } \textbf{exclusivement} \text{ de } x(t),\ t \leq t_0$$

Exemple : $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x^2(\tau - 1)\, d\tau$

Puisque $y(t)$ depend de $x(t)$ avec $t \in]-\infty, t_0 - 1]$, le système est **causal**

Exemple : $y(t) = 3\, x^2(t-1) + 2\, x(t+3)$

Puisque $y(t_0)$ depend de $x(t_0 - 1)$ et $x(t_0 + 3)$, le système **n'est pas causal**

Système invertible

$x(t)$ peut être retrouvé de manière unique à partir de $y(t)$

Exemple : $y(t) = 4\,x(t)$

$$x(t) = \frac{1}{4}\,y(t)$$

Le système est **invertible** car $x(t)$ peut être déterminé à partir de $y(t)$

Exemple : $y(t) = x^2(t)$

$$x(t) = \pm\sqrt{y(t)}$$

Le système n'est **pas invertible**

Système stable (BIBO : bounded input bounded output)

toute entrée $x(t)$ bornée $\rightarrow$ sortie $y(t)$ bornée

Exemple : $y(t) = e^{-|x(t)|}$

Puisque $|y(t)| < \infty$ pour tout $x(t)$, le système est **stable**

Exemple : $y(t) = t\,x(t)$

Pour $x(t) = K$, on observe que $\lim_{t\rightarrow\infty} y(t) \rightarrow \infty$

Le système est donc **instable**

Pour prouver qu'un système est instable, il suffit d'exhiber un exemple
Pour prouver qu'un système est stable, il faut le démontrer pour tout $x(t)$

Systèmes

Classification des systèmes

Système continu ou discret

Continu : l'entrée et la sortie sont des signaux continus

Discret : l'entrée et la sortie sont des signaux discrets

Système analogique ou numérique

Analogique : l'entrée et la sortie sont des signaux analogiques

Numérique : l'entrée et la sortie sont des signaux numériques