Signaux et Systèmes

Signaux : définitions et propriétés élémentaires

Cédric RICHARD
Université Côte d'Azur

Signaux et systèmes

Énergie et puissance

Puissance instantanée d'un signal

La puissance instantanée d'un signal $x(t)$ est définie par :

$$p_x(t) = |x(t)|^2$$

Unité : Watt (W)

Énergie d'un signal

L'énergie d'un signal $x(t)$ est définie par :

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

Un signal est dit à énergie finie si $E_x < \infty$

Unité : Joule ou wattheure (J ou Wh)

Puissance moyenne d'un signal :

La puissance moyenne d'un signal $x(t)$ est définie par :

$$P_x = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt$$

Unité : Watt (W)

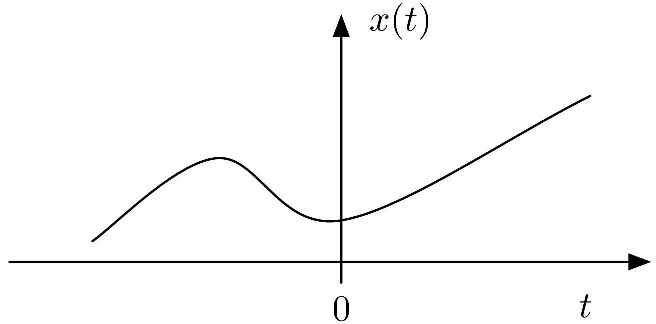
Remarques :

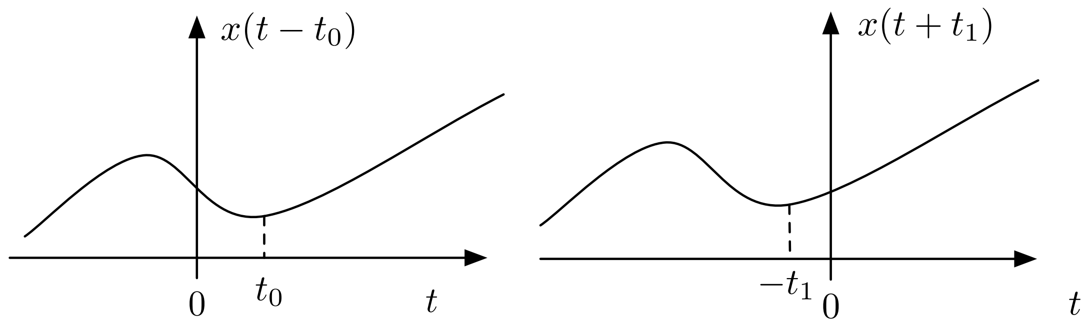
- ▷ Un signal à énergie finie est à puissance moyenne nulle
- ▷ La puissance moyenne d'un signal périodique se calcule sur une période
- ▷ Il existe des signaux tels que $E_x \to \infty$ et $P_x \to \infty$, e.g., $x(t) = t$

OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES SUR LES SIGNAUX

Translation temporelle

$$x(t) \rightarrow x(t - t_0) \qquad (t \rightarrow t - t_0)$$



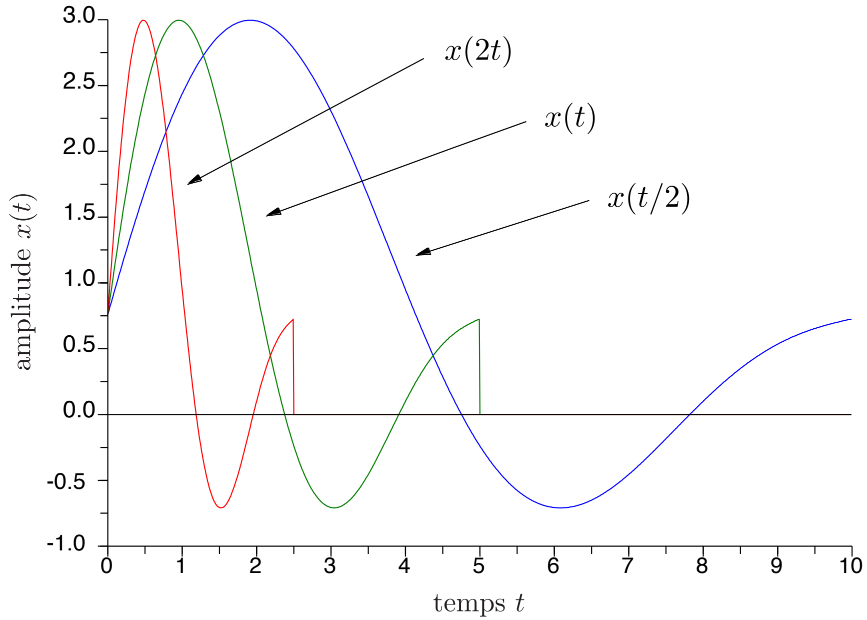


Opérations élémentaires sur les signaux

Changement d'échelle temporelle

$$x(t) \to x(at) \qquad\qquad (t \to at)$$

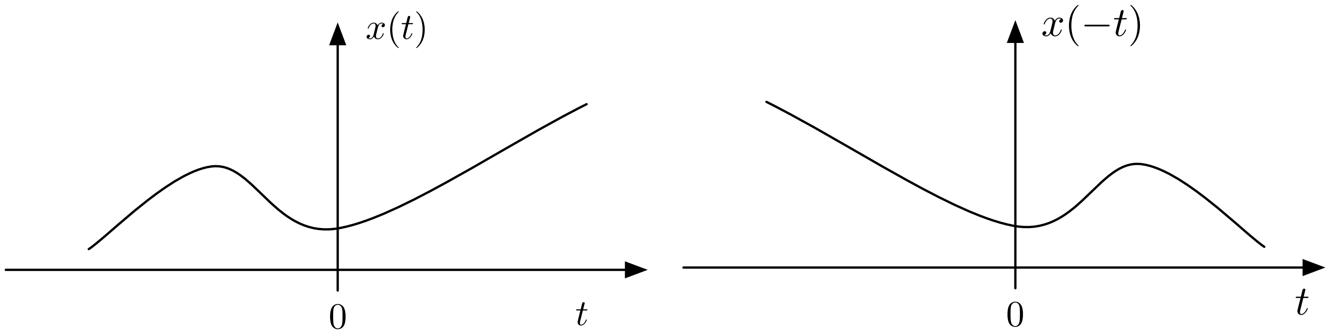
$$a > 1 : \text{compression} \qquad a < 1 : \text{dilatation}$$



Opérations élémentaires sur les signaux

Renversement temporel

$$x(t) \to x(-t) \qquad (t \to -t)$$



Opérations élémentaires sur les signaux

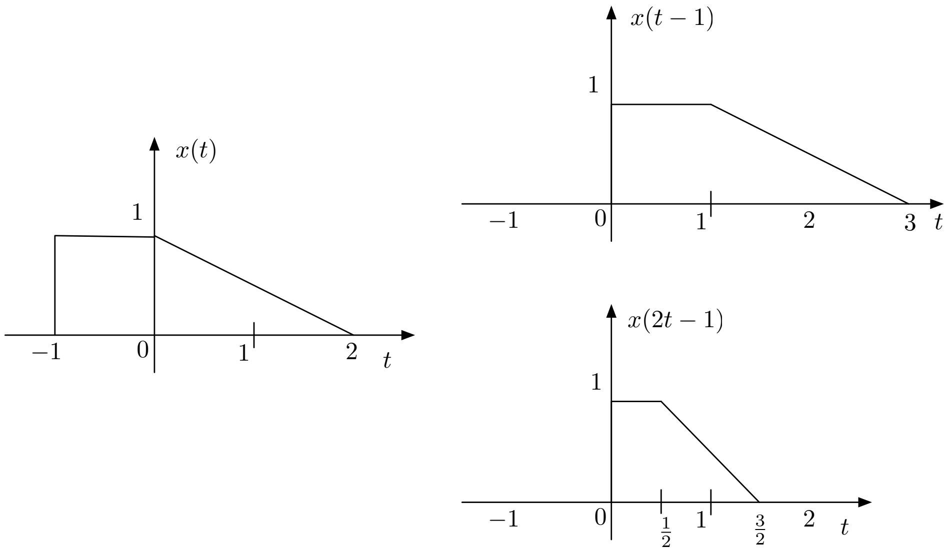
Transformations affines

$$x(t) \to x(at-b), \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

Décomposition :

$$x(t) \xrightarrow{t \to (t-b)} x(t-b) \qquad \text{(translation)}$$

$$x(t-b) \xrightarrow{t \to at} x(at-b) \qquad \text{(changement échelle)}$$



Opérations élémentaires sur les signaux

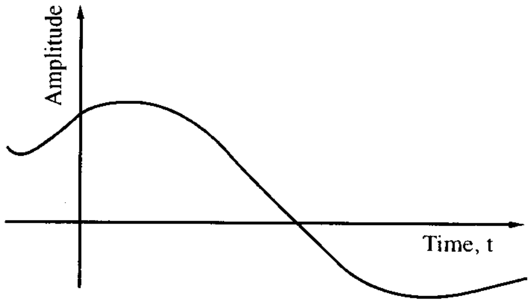
Classification des signaux

Signal analogique :	signal $x(t)$ continu en temps et en amplitude
Signal échantillonné :	signal $x[n]$ défini uniquement pour des valeurs discrètes de n
Signal quantifié :	signal $x(t)$ discret en amplitude
Signal numérique :	signal échantillonné et quantifié

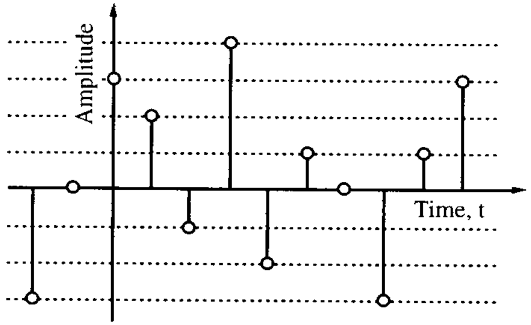
Le cours concerne les signaux analogiques

Opérations élémentaires sur les signaux

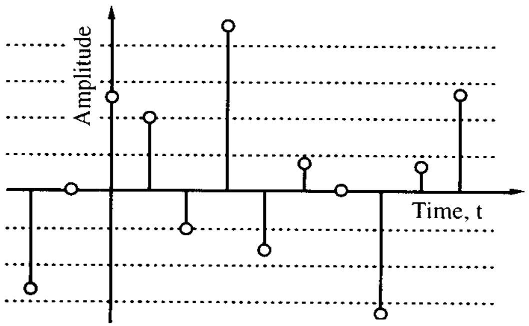
Classification des signaux



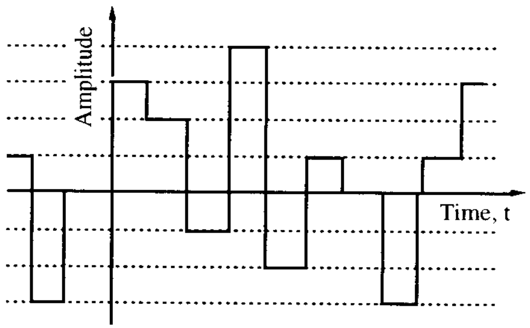
continu



numérique



échantillonné



quantifié

Propriétés élémentaires des signaux

Signaux périodiques et apériodiques

Signal périodique

Un signal $x(t)$ est périodique s'il existe $T_o \neq 0$ tel que :

$$x(t) = x(t + T_o) \quad \forall t$$

La plus petite valeur $T_o > 0$ pour laquelle la relation ci-dessus est vérifiée est appelée **période**

Signal apériodique

Un signal $x(t)$ est apériodique s'il n'est pas périodique

Propriétés élémentaires des signaux

Signaux causaux, non-causaux et anti-causaux

Signal causal

Un signal $x(t)$ est causal si :

$$x(t) = 0 \quad \forall t < 0$$

L'instant $t = 0$ est l'origine des temps

Signal non-causal

Un signal $x(t)$ est non-causal si son origine précède $t = 0$

Signal anti-causal

Un signal $x(t)$ est anti-causal si :

$$x(t) = 0 \quad \forall t > 0$$

Propriétés élémentaires des signaux

Signaux à énergie ou puissance moyenne finie

Signal à énergie finie

Un signal $x(t)$ est à énergie finie si $E_x < +\infty$

Signal à puissance moyenne finie

Un signal $x(t)$ est à puissance moyenne finie si $P_x < +\infty$

Remarque

- ▷ Certains signaux ne sont, ni à énergie finie, ni à puissance moyenne finie
- ▷ En pratique, les signaux sont supposés à énergie finie

Propriétés élémentaires des signaux

Signaux pairs et impairs

Signal pair

Un signal $x(t)$ est pair si :

$$x(-t) = x(t) \quad \forall t$$

$\rightarrow$ symétrie des cadrants $(1, 2)$ et $(3, 4)$

Signal impair

Un signal $x(t)$ est impair si :

$$x(-t) = -x(t) \quad \forall t$$

$\rightarrow$ symétrie des cadrants $(1, 3)$ et $(2, 4)$

Propriétés élémentaires des signaux

Signaux pairs et impairs

Remarque

Tout signal peut se décomposer en une somme d'un signal pair et d'un signal impair

$$x_{\text{pair}}(t) = \frac{x(t)+x(-t)}{2} \qquad \rightarrow \qquad x_{\text{pair}}(-t) = x_{\text{pair}}(t)$$

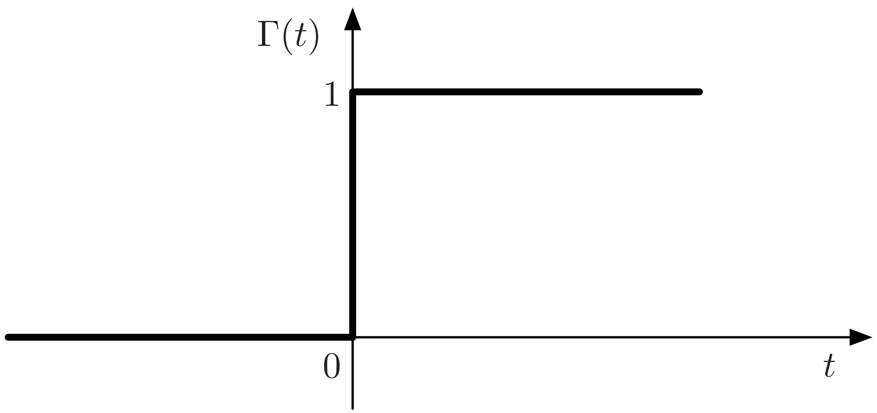
$$x_{\text{impair}}(t) = \frac{x(t)-x(-t)}{2} \qquad \rightarrow \qquad x_{\text{impair}}(-t) = -x_{\text{impair}}(t)$$

$$x(t) = x_{\text{pair}}(t) + x_{\text{impair}(t)}$$

Modèles utiles de signaux

Échelon unité ou fonction d'Heaviside

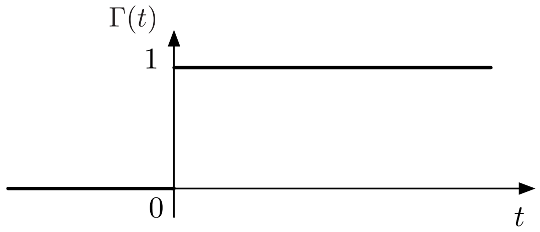
$$\Gamma(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 1/2, & t = 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

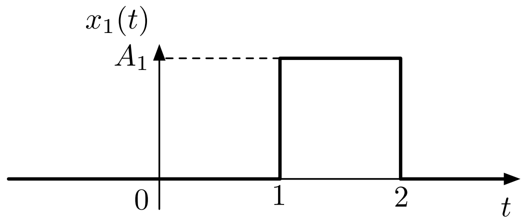


- ▷ modélisation de variations brutales
- ▷ modélisation de signaux causaux

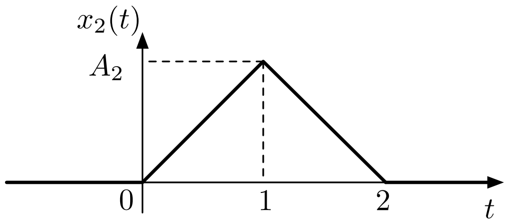
Modèles utiles de signaux

Échelon unité ou fonction d'Heaviside





$$x_1(t) = A_1 \left[\Gamma(t-1) - \Gamma(t-2)\right]$$

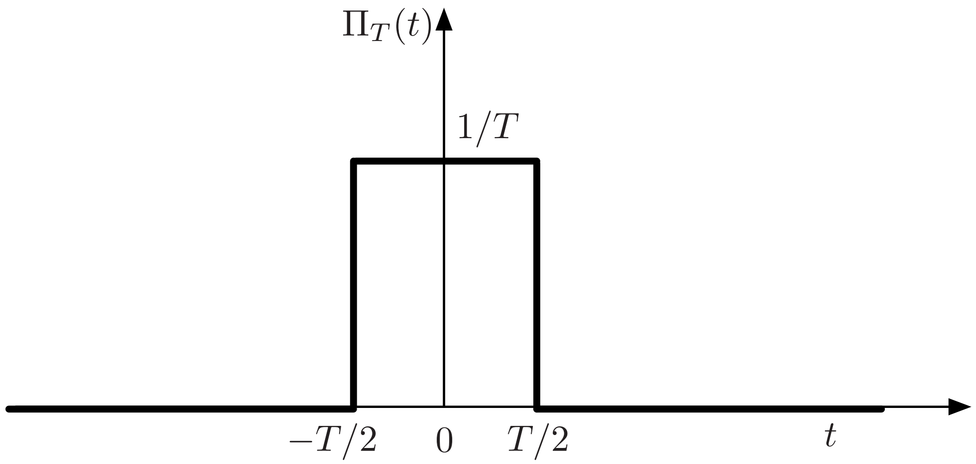


$$x_2(t) = A_2 t \left[\Gamma(t) - \Gamma(t-1)\right] - A_2(t-2)\left[\Gamma(t-1) - \Gamma(t-2)\right]$$

Modèles utiles de signaux

Fonction porte ou rectangulaire

$$\Pi_T(t) = \begin{cases} 1/T, & |t| < T/2 \\ 1/2T, & |t| = T/2 \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$$

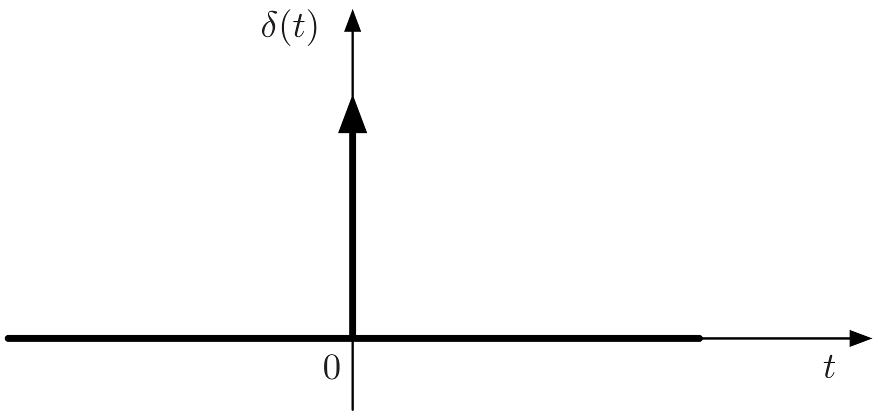


- ▷ modélisation de signaux à support temporel borné
- ▷ $\Pi_T(t) = \frac{1}{T}\left[\Gamma(t - \frac{T}{2}) - \Gamma(t + \frac{T}{2})\right]$

Modèles utiles de signaux

Impulsion de Dirac

$$\delta(t) = \lim_{T \to 0} \Pi_T(t)$$



Modèles utiles de signaux

Impulsion de Dirac

Propriétés :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-t_0)\, dt = x(t_0)$$

Relations avec l'échelon unité :

$$\Gamma(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau \qquad \delta(t) = \frac{d\Gamma(t)}{dt}$$

Modèles utiles de signaux

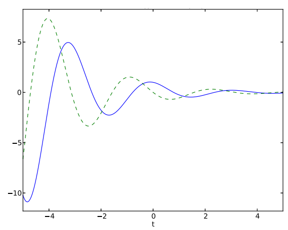
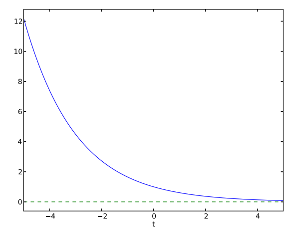
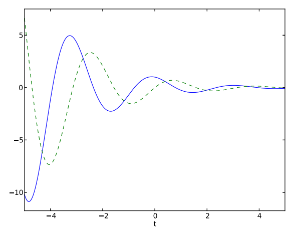
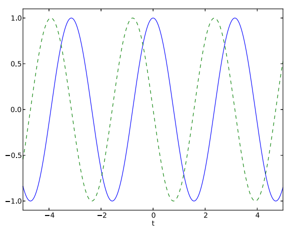
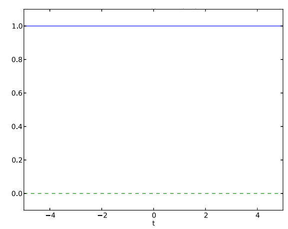
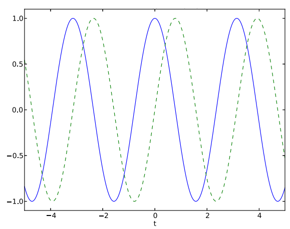
Fonction exponentielle

$$x(t) = e^{st}, \qquad s = \sigma + j\omega, \qquad j = \sqrt{-1}$$

$s = 0$	$x(t) = 1$	signal constant
$s = \sigma$	$x(t) = e^{\sigma t}$	signal exponentiel
$s = j\omega$	$x(t) = e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t)$	signal harmonique (porteuse)
$s = \sigma \pm j\omega$	$x(t) = e^{\sigma t}[\cos(\omega t) + j\sin(\omega t)]$	signal modulé

Modèles utiles de signaux

Fonction exponentielle

$\sigma \backslash \omega$	-2	0	2
-0.5			
0			
$.5$