Les codes linéaires

Exercice 1
Construire les mots du code linéaire $\mathcal{L}$ de longueur 6 dont une matrice génératrice est :

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2
Soit $\mathcal{L}$ le code linéaire dont une matrice génératrice est :

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Construire les mots de $\mathcal{L}$. Combien d'erreurs par mot peut-on détecter et corriger avec ce code ? Mettre $\mathbf{G}$ sous forme standard.

Exercice 3
Soit $\mathcal{L}$ le code linéaire dont une matrice génératrice est :

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Utiliser la méthode de Gauss pour déduire une matrice de test $\mathbf{H}$.

Exercice 4
Dans $(\mathbf{F}_2)^3$, donner tous les codes linéaires de dimension 2. Expliciter la relation donnant le nombre de ces codes.

Exercice 5
On considère la matrice de test suivante :

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le code associé à $\mathbf{H}$ permet-il la correction de 2 erreurs par mot ?

Exercice 6
Soit $\mathcal{L}$ le code linéaire de $(\mathbf{F}_3)^5$ dont une matrice génératrice est :

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Construire les mots du code. Coder le mot d'information $(1\ 2)$. Soit $\mathbf{G}'$ la matrice suivante :

$$\mathbf{G}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Montrer que cette matrice est une autre matrice génératrice de $\mathcal{L}$.

Exercice 7
Pour chacune des matrices génératrices suivantes, donner une matrice de test.

$$\mathbf{G}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{G}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{G}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8
Trouver la distance minimale du code binaire $\mathcal{L}$ dont une matrice test est donnée par :

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$