

Calculs dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

Exercice 1

Déterminer les entiers n tels que $\text{pgcd}(2n + 18, n + 3) = 1$. On rappelle que si $a = bq + r$, alors $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(r, b)$.

Exercice 2

Construire les tables additives et multiplicatives de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

Exercice 3

On se place dans l'anneau $\mathbb{Z}/21\mathbb{Z}$.

1. Calculer 8^5 . En déduire, s'il existe, l'ordre multiplicatif de 8.
2. Calculer 7^2 . Quel est l'ordre multiplicatif, s'il existe, de 7 ?

Exercice 4

On se place dans l'anneau $\mathbb{Z}/47\mathbb{Z}$. Donner l'inverse de $x = 3$ en calculant ses puissances successives. A partir du résultat précédent, comment peut-on trouver l'inverse de $x = 2$?

Exercice 5

Résoudre dans $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ l'équation suivante :

$$\frac{2}{3}x + \frac{7}{8} = \frac{1}{9},$$

où $1/a$ représente l'inverse de a .

Exercice 6

Résoudre dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ les équations suivantes :

1. $5x + b = c$
2. $3x + 4 = 1$
3. $2x + 3 = 0$

Donnez, en fonction de a , les différents cas de figure possibles dans la résolution de l'équation $ax + b = c$ dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

Exercice 7

Montrer que $n(n + 1)(2n + 1)$ est multiples de 6.

Exercice 8

Montrer que la matrice A définie ci-dessous est une matrice singulière de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9

Considérons la matrice binaire suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer le polynôme caractéristique de A . On rappelle que ce polynôme $P(x)$ est tel que

$$P(M) = a_0I + a_1M + a_2M^2 + a_3M^3 + a_4M^4 = (0),$$

où I représente la matrice identité et (0) la matrice nulle.

Exercice 10

Soit f une application linéaire de $[\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}]^4$ dans $[\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}]^4$ définie par :

$$f(1000) = f(0001) = 0110, \quad f(0100) = 1100, \quad f(0010) = 1010.$$

Construire une base de $\text{Ker } f$, puis la compléter de sorte à obtenir une base de $[\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}]^4$.