Cédric Richard

Codage de source discrète

Exercice 1

Indiquer pour chacun des codes suivants s'il est régulier, déchiffrable, instantané et complet : $\mathcal{C}_1 = \{00, 01, 10, 11\}$, $\mathcal{C}_2 = \{0, 01, 11\}$, $\mathcal{C}_3 = \{0, 10, 11\}$, $\mathcal{C}_4 = \{0, 11, 111\}$.

Exercice 2

On considère une source S pouvant émettre 5 symboles, dont la probabilité p_i de chacun figure dans le tableau ci-dessous. Ce dernier fournit également deux codages binaires possibles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ de S. Indiquer si ces codes sont déchiffrables et instantanés. Calculer la longueur moyenne $\overline{n}_1$ et $\overline{n}_2$ de leurs mots. Comparer ces valeurs à la longueur moyenne minimum $\overline{n}_{\min}$ des mots de tout codage binaire de S.

s_i	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
p_i	0.50	0.18	0.14	0.12	0.06
$\mathcal{C}_1$	0	10	11	101	1001
$\mathcal{C}_2$	00	10	11	010	011

Exercice 3

On considère une variable aléatoire X pouvant prendre n valeurs distribuées selon la loi $P(X = x_i) = \left(\frac{1}{2}\right)^i$ lorsque $i \in \{1, 2 \ldots, n-1\}$, et $P(X = x_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. Déterminer la longueur moyenne minimum des mots d'un code binaire consacré aux valeurs possibles de X. Proposer un code binaire à l'aide de la méthode de Huffman et calculer la longueur moyenne des mots de celui-ci. Expliquer le résultat obtenu.

Exercice 4

Une table traçante utilise les commandes suivantes

lever la plume (LP)
baisser la plume (BP)
transfert avec incrémentation à gauche (–X)
transfert avec incrémentation à droite (+X)
transfert avec incrémentation en haut (+Y)
transfert avec incrémentation en bas (–Y).

Quel est le nombre moyen minimum de bits requis pour ce jeu de commandes, sachant que les probabilités respectives des différents états sont données par

$$P_{\text{LP}} = P_{\text{BP}} = P_{\text{-X}} = 0.1 \qquad P_{\text{+X}} = 0.3 \qquad P_{\text{+Y}} = P_{\text{-Y}} = 0.2$$

Construire un code binaire de Shannon. Utiliser la technique de Huffman pour élaborer un autre code binaire. Comparer les deux solutions obtenues.

Exercice 5

Un lycée doit communiquer par voie télématique une liste de résultats au baccalauréat concernant 2500 étudiants. Ces résultats sont les suivants : 250 mentions bien, 375 mentions assez-bien, 1125 mentions passable, 625 insuffisants et 125 absents. Établir un code de Huffman binaire pour compresser le fichier. Calculer la longueur moyenne des mots utilisés. Calculer la taille du fichier si l'on codait l'information de manière classique, à l'aide d'un code à longueur fixe comprenant 8 bits. Évaluer le gain en taille de fichier réalisé grâce au code de Huffman. Calculer le temps de transmission du fichier si l'on utilise un modem fonctionnant à 14400 bits/s.

Problème 1

On considère un code comprenant deux mots de longueur 2, deux mots de longueur 3 et un mot de longueur 4.

1. Montrer qu'il existe un code binaire déchiffrable respectant ces longueurs de mots. Dessiner un arbre de codage possible. Modifier celui-ci de sorte à réduire la longueur moyenne des mots du code quelle que soit la distribution de probabilité.

2. On donne les probabilités suivantes $\{0.50, 0.18, 0.14, 0.12, 0.06\}$ à chacun des 5 états d'une source. Associer ces probabilités aux mots du code proposé à la question précédente de sorte à minimiser la longueur moyenne de codage. Calculer celle-ci et montrer qu'il existe des codes binaires plus performants.

3. Proposer un code binaire à l'aide de la méthode de Huffman. Comparer la longueur moyenne de ses mots à celle obtenue à la question précédente.

Problème 2

On considère la source markovienne binaire définie ci-dessous, où $p = \frac{1}{10}$ et $q = \frac{2}{10}$.

$$\begin{aligned}
P(S_n = 0 | S_{n-1} = 1) &= p \\
P(S_n = 1 | S_{n-1} = 1) &= 1 - p \\
P(S_n = 1 | S_{n-1} = 0) &= q \\
P(S_n = 0 | S_{n-1} = 0) &= 1 - q.
\end{aligned}$$

1. Déterminer la distribution stationnaire de la source. Dans la suite de l'exercice, on adoptera celle-ci en guise de distribution initiale des états de la source. Calculer l'entropie de la source en ne prenant pas en compte la dépendance des états. En déduire dans ce cas la longueur moyenne minimum des mots d'un code binaire de cette source.

2. Calculer l'entropie de la source markovienne, ce qui suppose la prise en compte de la dépendance d'états successifs. En déduire la longueur moyenne minimum des mots d'un code binaire de cette source.

3. On considère une extension d'ordre 2 de la source. Calculer l'entropie de cette dernière. En déduire dans ce cas la longueur moyenne minimum des mots d'un code binaire de cette source. Proposer un code de Huffman et calculer la longueur moyenne des mots de celui-ci.