UNIVERSITÉ CÔTE D'AZUR

Cédric Richard

Mesure quantitative de l'information (I)

Exercice 1

Une personne que vous ne connaissez pas dit : «Aujourd'hui, c'est mon anniversaire !». Calculer l'information propre véhiculée par cette déclaration. Calculer la quantité d'information moyenne associée à une communication de cette nature.

Exercice 2

On suppose que les 64 cases d'un échiquier sont équiprobables. Déterminer la quantité d'information moyenne contenue dans une communication indiquant la position d'une pièce du jeu. Proposer une stratégie dichotomique, reposant sur des questions du type «La pièce est-elle sur cette partie de l'échiquier ?», permettant de deviner la position d'une pièce en un nombre moyen minimum de coups. Comparer le nombre de questions posées à l'entropie en Shannon calculée en début d'exercice.

Exercice 3

Une pièce de monnaie parfaitement équilibrée est lancée jusqu'à ce que la première face apparaisse. Déterminer l'entropie $H(X)$ en Shannon, où la variable aléatoire X désigne le nombre de jets requis. Proposer une stratégie dichotomique, reposant sur des questions à réponse binaire du type « X est plus petite ou plus grande que (...)», permettant de deviner la valeur prise par X en un nombre moyen minimum de coups. Comparer le nombre de questions posées à l'entropie $H(X)$ exprimée en Shannon. Afin de résoudre cet exercice, on pourra avoir recours à l'égalité $\sum_{n=1}^{\infty} n\, a^n = \frac{a}{(1-a)^2}$.

Exercice 4

Soit une source S sans mémoire émettant des mots m_i avec une probabilité p_i. Chacun d'eux est constitué de n_i symboles issus d'un alphabet qui en compte q, dit *alphabet q-aire*. Calculer le nombre moyen $\overline{n}$ de symboles par mot. En notant $H(S)$ l'entropie de la source S, calculer l'entropie de la source q-aire sous-jacente. Après avoir rappelé la valeur maximale que peut prendre cette dernière, établir un minorant de $\overline{n}$. Ceci fournit une limite inférieure à la longueur moyenne des mots codant les états d'une source. En considérant un alphabet binaire, interpréter les résultats des deux précédents exercices.

Exercice 5

On considère une cuve constituée de deux compartiments de volumes identiques. Le compartiment I est rempli de deux gaz inertes en proportions respectives $(\frac{2}{5}, \frac{3}{5})$. Ces mêmes gaz emplissent le compartiment II en proportions $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, respectivement. En supposant que la pression et la température régnant dans chacun des compartiments sont identiques, calculer l'entropie de la cuve avant et après que les deux compartiments communiquent. Interpréter le résultat.

Exercice 6

Une source émet les symboles 0 et 1 avec les probabilités $P(0) = \frac{1}{4}$ et $P(1) = \frac{3}{4}$. Ceux-ci sont transmis à un récepteur au travers d'un canal imparfait illustré par la figure 1, avec $p_0 = 10^{-1}$. En notant X et Y les symboles émis et reçus, calculer les grandeurs suivantes : $H(X)$, $H(Y)$, $H(X,Y)$, $H(Y|X)$, $H(X|Y)$ et $I(X,Y)$.

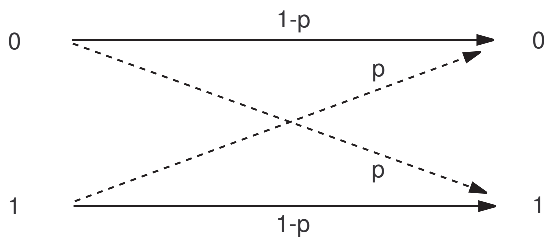

Figure 1: Canal de transmission imparfait.

Problème 1

Soit $\{\mathcal{E}_k\}_{k=1}^n$ une partition d'un ensemble $\mathcal{E}$. On note N et N_k les nombres d'éléments des ensembles $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}_k$, respectivement. On suppose que les éléments de $\mathcal{E}$ sont équiprobables, et on pose $p_k = N_k/N$.

1. Déterminer la quantité d'information propre associée à l'appartenance d'un élément à un ensemble $\mathcal{E}_k$. Calculer la quantité d'information moyenne nécessaire à sa caractérisation au sein de $\mathcal{E}_k$.

2. Calculer la quantité d'information moyenne nécessaire à la caractérisation de tout élément de $\mathcal{E}$. En remarquant que l'on peut décomposer la procédure d'identification d'un élément de $\mathcal{E}$ en 2 étapes, c'est-à-dire (a) identification de l'ensemble $\mathcal{E}_k$ puis (b) détermination de l'élément dans l'ensemble $\mathcal{E}_k$, évaluer la quantité d'information moyenne nécessaire à l'identification du sous-ensemble $\mathcal{E}_k$.

Problème 2

On dispose d'une balance à plateaux et de 9 pièces de monnaie. L'une d'elles est fausse. Il s'agit de l'identifier sachant qu'elle diffère uniquement des 8 autres par le poids.

1. Déterminer le nombre de cas possibles, en considérant que la fausse pièce peut être plus lourde ou plus légère que les autres. En déduire la quantité d'information moyenne nécessaire à l'identification de cette pièce.

2. Décrire le principe d'une pesée élémentaire et ses résultats possibles. En supposant que ces derniers sont équiprobables, déterminer la quantité d'information apportée par chaque pesée. Dans ces conditions, évaluer le nombre de pesées qu'il faut prévoir.

Soit n le nombre de pièces que l'on dispose dans chaque plateau. On cherche n de sorte à maximiser l'entropie H de chaque pesée. Soient P_d, P_g et P_e les probabilités pour que la balance penche à droite, à gauche ou reste en équilibre.

3. Calculer les probabilités P_d, P_g et P_e.

4. Déterminer la valeur de n maximisant H et la quantité d'information moyenne recueillie au cours d'une telle pesée.