

## Rappels de Calculs de Probabilités

### Exercice 1

On dispose d'un jeu de 52 cartes dans lequel on effectue un tirage au hasard avec remise. Calculer la probabilité d'obtenir une dame, un cœur, une dame de cœur ou un as de pique, une dame ou un pique, ni une dame ni un pique.

### Exercice 2

On considère une urne contenant 5 boules blanches, 4 boules rouges et 2 boules noires. On tire une boule de celle-ci. Calculer la probabilité qu'elle soit blanche, qu'elle ne soit pas rouge, qu'elle soit blanche ou rouge. On effectue à présent le tirage avec remise de 3 boules. Calculer la probabilité d'obtenir dans l'ordre une boule blanche, une rouge et enfin une noire. Traiter cette même question dans le cas où le tirage est sans remise.

### Exercice 3

Au cours d'un Poker, on tire 5 cartes dans un jeu qui en compte 52. Calculer la probabilité d'obtenir une paire soit 2 cartes de même hauteur, un brelan soit 3 cartes de même hauteur, une couleur soit 5 cartes de même couleur, un full soit un brelan et une paire, un carré soit 4 cartes de même hauteur.

### Exercice 4

Lorsque les équipes  $E_1$  et  $E_2$  s'affrontent au football, les probabilités que  $E_1$  batte  $E_2$  ou que la rencontre se solde par un match nul valent respectivement  $1/2$  et  $1/6$ . Au cours d'un tournoi, ces deux équipes sont amenées à se rencontrer 5 fois. Calculer la probabilité que  $E_1$  gagne toutes les parties, que  $E_1$  ne gagne pas au moins une fois, que 2 des matchs soient nuls.

### Exercice 5

Initialement, une urne I contient 2 boules noires et 3 boules blanches tandis qu'une urne II regroupe 4 boules noires et 6 boules blanches. On procède au tirage d'une boule dans chaque urne. Calculer la probabilité de tirer 2 boules de même couleur. A présent, on suppose que la boule tirée dans I est placée dans II avant de procéder au second tirage. Calculer la probabilité d'obtenir 2 boules de même couleur.

### Exercice 6

Un individu est sélectionné au hasard dans une population comptant une proportion  $p$  de tricheurs. On lui demande de tirer une carte dans un jeu qui en compte 52. On admet que les tricheurs tirent toujours des as. Calculer la probabilité que l'individu sélectionné obtienne un as. Calculer la probabilité qu'il s'agisse d'un tricheur s'il tire une telle carte.

### Exercice 7

On considère le lancé de 2 dés non-pipés. On note  $X$  la somme des points obtenus et  $Y$  le plus grand nombre de points obtenus avec l'un des dés. Étudier ces deux variables aléatoires.

**Problème 1**

Une source émet les symboles 0 et 1 avec les probabilités  $P(0) = 0.2$  et  $P(1) = 0.8$ . Ceux-ci sont transmis à un récepteur au travers d'un canal imparfait illustré en Fig. 1, avec  $p_0 = 10^{-5}$ . Calculer la probabilité d'erreur d'une telle transmission. On suppose à présent que chaque symbole émis par la source est transmis simultanément au travers de 2 canaux du même type que le précédent, avec  $p_1 = 10^{-5}$  et  $p_2 = 2 \cdot 10^{-5}$ . Le récepteur a alors en charge de fournir au destinataire un symbole binaire, étant donné un couple de symboles reçu parmi 00, 01, 10 et 11. La règle de décodage adoptée consiste à choisir le symbole qui a le plus de chance d'avoir été émis, étant donnée la paire reçue. Expliciter cette règle de décodage. Calculer la probabilité d'erreur d'une telle transmission et la comparer à celle trouvée précédemment.

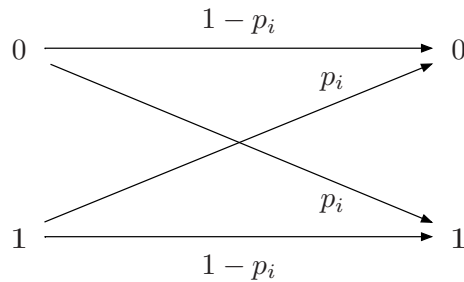


Figure 1: Canal de transmission imparfait.

**Problème 2**

Soit une source émettant un signal  $X(t, \omega)$  constitué d'une séquence de symboles  $+a$  et  $-a$  au travers d'un canal bruité. On considère que le signal reçu par le récepteur s'écrit  $Y(t, \omega) = X(t, \omega) + B(t, \omega)$ , où  $B(t, \omega)$  est un bruit indépendant de  $X(t, \omega)$ . Étant donné  $t$ , on suppose que  $X$  prend les valeurs  $+a$  et  $-a$  avec les probabilités respectives  $p$  et  $1-p$ , et que  $B$  est distribué selon une loi gaussienne centrée de variance  $\sigma^2$ . La règle de décodage adoptée par le récepteur consiste à considérer que le symbole  $+a$  a été émis si  $Y > \eta$ , sinon  $-a$ , où  $\eta$  désigne un seuil. Calculer la probabilité d'erreur du récepteur en fonction de  $a$ ,  $\sigma^2$ ,  $\eta$  et  $p$ . Déterminer la valeur du seuil  $\eta$  minimisant cette probabilité d'erreur. Étudier le cas  $p = \frac{1}{2}$  et montrer que la probabilité d'erreur du décodeur s'exprime en fonction de  $a$  et  $\sigma$ . Interpréter les résultats. On suppose à présent que le décodeur dispose de  $n$  échantillons  $Y(t_k, \omega)$  du signal reçu pour déterminer le symbole émis, et que la règle de décision adoptée par celui-ci consiste à comparer la moyenne  $Y(\omega) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y(t_k, \omega)$  à un seuil  $\eta$ . Répondre aux mêmes questions que précédemment dans l'hypothèse où les  $n$  variables aléatoires  $Y(t_k, \omega)$  sont indépendantes. Interpréter les résultats lorsque  $n$  tend vers l'infini.