

Chapitre 3

Détection par représentations temps-fréquence discrètes

3.1. Position du problème

Parce qu'elles fournissent une caractérisation spectrale locale nécessaire à l'analyse des signaux non stationnaires, les représentations temps-fréquence (RTF) jouent un rôle fondamental en traitement du signal. Parmi les nombreuses solutions proposées à ce jour, la distribution de Wigner-Ville est souvent privilégiée en raison des nombreuses propriétés qu'elle vérifie, parmi lesquelles on compte par exemple celles relatives à ses distributions marginales et à son support [FLA 98]. Cette distribution constitue également une solution intéressante pour la résolution de problèmes de détection par RTF, principalement en raison de sa covariance par rapport aux translations dans le plan temps-fréquence et de son unitarité [FLA 88, SAY 95].

Afin d'implémenter la distribution de Wigner-Ville sur un ordinateur, il est nécessaire d'en donner une définition pour laquelle les variables *temps* et *fréquence* prennent des valeurs discrètes. De nombreuses approches ont été proposées afin de résoudre ce problème non trivial. Généralement, la distribution de Wigner-Ville discrète est considérée sous la forme suivante, dite *classique* dans la suite de ce chapitre :

$$WV_{xy}^{(C)}[t, \nu] \triangleq \sum_{\tau=0}^{N-1} x[t + \tau] y^*[t - \tau] e^{-j \frac{2\pi}{N} \nu \tau} \quad [3.1]$$

avec t et ν le temps et la fréquence normalisée, à valeurs discrètes dans l'ensemble $\{0, \dots, N-1\}$. Cette définition présente toutefois certains inconvénients, l'un des principaux étant de ne fournir qu'une représentation spectrale locale de la bande normalisée $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$. Par rapport à la distribution de Wigner-Ville à variables continues, la perte de certaines propriétés fondamentales telles que l'unitarité est également à déplorer. Récemment, des efforts importants décrits dans [COS 01] ont été portés afin de développer une distribution de Wigner-Ville discrète autorisant une analyse de la totalité de la bande de fréquence normalisée $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Dans [RICH 98], Richman *et al.* ont fait appel à la théorie des groupes. La distribution de Wigner-Ville discrète résultant de leur étude vérifie des propriétés analogues à celles satisfaites par son homologue à variables continues. En notant N le nombre d'échantillons des signaux analysés et en utilisant la notation $(a)_N$ pour a modulo N , elle est définie ainsi :

$$WV_{xy}^{(R)}[t, \nu] \triangleq \frac{1}{N} \sum_{\tau=0}^{N-1} \sum_{\nu'=0}^{N-1} \sum_{t'=0}^{N-1} \psi_N[\nu', \tau] e^{-j\frac{2\pi}{N}(\nu't + \nu\tau)} e^{j\frac{2\pi}{N}\nu't'} x[(t' + \tau)_N] y^*[t'] \quad [3.2]$$

où t et ν sont des éléments de $\{0, \dots, N-1\}$. Il est à noter que la fonction ψ_N mentionnée ci-dessus, dont l'expression figure dans [RICH 98], dépend de la parité de N . Dans [ONE 99a, ONE 99b], les auteurs ont privilégié une approche axiomatique. Leur démarche mène à la conclusion que la distribution de Wigner-Ville discrète n'existe que pour les signaux dont le nombre d'échantillons N est impair et que, dans ce cas, elle est définie par [3.2]. Enfin, parmi les nombreux travaux sur le sujet, on peut encore citer ceux de Peyrin et Prost, qui ont étudié le phénomène de repliement inhérent à leur procédé de discrétisation [PEY 86], ainsi que ceux de Stanković, qui présentent une distribution reposant sur la transformée de Fourier à court terme [STA 94, STA 01].

Les méthodes temps-fréquence, et en particulier la distribution de Wigner-Ville, ont souvent été associées à des structures décisionnelles en vertu du point de vue intéressant qu'elles offrent sur les signaux non stationnaires. Ce type d'approche couvre des domaines aussi variés que l'acoustique [DAV 00], l'astrophysique [CHA 98], le biomédical [RIC 98] ou encore les radars [LEM 95]. Durant la dernière décennie, une théorie sur la détection optimale par représentation temps-fréquence a été développée. En particulier, Flandrin a caractérisé des scénarios de détection pour lesquels des structures de détection opérant dans le plan temps-fréquence revêtent un caractère optimal [FLA 88]. Plus récemment, Sayeed et Jones ont présenté des détecteurs temps-fréquence optimaux pour la détection de signaux aléatoires du second ordre en présence de bruit gaussien, avec pour paramètres de nuisance l'instant d'arrivée et la fréquence initiale de l'événement à détecter [SAY 95]. Enfin, Matz et Hlawatsch ont proposé une simplification de ces structures afin d'en faciliter l'implémentation [MAT 98]. Dans le cadre de tous ces travaux, il convient de noter que le temps et la fréquence sont considérés comme des variables continues. Il en résulte que les détecteurs

proposés nécessitent d'être préalablement discrétisés avant de pouvoir être implémentés sur un ordinateur. Cette opération peut toutefois être lourde de conséquences, les procédures de discrétisation des RTF étant multiples et pouvant s'accompagner de la perte de propriétés importantes, comme cela vient d'être évoqué dans le cas de la distribution de Wigner-Ville.

Le présent chapitre est consacré à l'étude des détecteurs opérant sur la distribution de Wigner-Ville discrète. Il a pour objectif de donner quelques repères quant au choix d'une définition pour cette distribution dans un contexte décisionnel. Ne pouvant être consacrée à l'étude de l'ensemble des solutions qui ont été proposées, la discussion qui suit a été volontairement limitée à la définition classique [3.1] et à la distribution [3.2] récemment proposée par Richman *et al.*, ces dernières offrant une vision représentative des problèmes qui peuvent être rencontrés. Aussi, nous abordons dans un premier temps le sujet du point de vue de la *détection à structure libre*, par le biais du problème de détection académique considéré dans [FLA 88]. Nous étudions alors l'existence de solutions temps-fréquence reposant sur l'une ou l'autre des distributions de Wigner-Ville discrètes considérées. Puis, nous nous consacrons au thème de la *détection à structure imposée* par RTF. A cette occasion, nous discutons du choix de la définition [3.1] ou [3.2] qui pourrait garantir les meilleures performances en détection, en ayant à l'esprit les effets néfastes induits par le phénomène de *malédiction de la dimensionnalité*. Ceci nous conduit finalement à compléter ce chapitre par une étude de la redondance informationnelle de la distribution classique [3.1]. Pour davantage de détails sur les thèmes développés ici, le lecteur intéressé est invité à consulter [RIC 01, RIC 02a, RIC 02b].

3.2. Détection à structure libre par distributions de Wigner-Ville

Dans cette section, nous montrons que la définition adoptée pour la distribution de Wigner-Ville discrète a un impact important sur les performances de la structure de détection à laquelle elle est associée. Le problème de détection sélectionné pour cela s'exprime ainsi :

$$\begin{cases} H_0 & x[t] = n[t] \\ H_1 & x[t] = n[t] + s[t] \end{cases} \quad [3.3]$$

avec $t \in \{0, \dots, N-1\}$, où x désigne une observation discrète et s le signal à détecter, considéré comme gaussien, de moyenne m et de covariance R_s . Le bruit n dans lequel est noyé ce dernier est supposé blanc, gaussien, centré et de variance σ^2 .

Le problème [3.3] possède une solution dans le plan temps-fréquence, dont on trouvera une description complète dans [FLA 88]. Cette dernière a été proposée en considérant le temps et la fréquence comme des variables continues. Nous nous proposons de le traiter ici dans le cas discret. Soit \mathcal{B} une base orthonormée de vecteurs

propres de R_s . On désigne par ϕ_k le k -ième élément de \mathcal{B} et par λ_k la valeur propre de R_s qui lui est associée. Le problème [3.3] admet une solution classique dans la base \mathcal{B} qui s'exprime ainsi :

$$\Lambda_R + \Lambda_D \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \gamma_0 \quad [3.4]$$

où γ_0 désigne un seuil donné et :

$$\Lambda_R = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\lambda_k}{\lambda_k + \sigma^2} |\tilde{x}[k]|^2 \quad [3.5]$$

$$\Lambda_D = 2 \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{\lambda_k + \sigma^2} \operatorname{Re}\{\tilde{x}[k] \tilde{m}^*[k]\} \quad [3.6]$$

avec :

$$\tilde{x}[k] = \sum_{t=0}^{N-1} x[t] \varphi_k^*[t], \quad \tilde{m}[k] = \sum_{t=0}^{N-1} m[t] \varphi_k^*[t] \quad [3.7]$$

On peut constater que ce résultat est équivalent à celui obtenu dans le cas continu [FLA 88], hormis le fait que [3.7] y est remplacé par une décomposition de Karhunen-Loève de x et m sur une base de fonctions propres de R_s . Cette similitude peut être prolongée en recherchant une formulation temps-fréquence de la règle de décision [3.4]. En adoptant une démarche analogue à celle qui est présentée dans [FLA 88], on est ainsi amené à constater que les expressions :

$$\Lambda_R = \frac{1}{N\sigma^2} \sum_{t,\nu=0}^{N-1} WV_x^{(\cdot)}[t, \nu] \left[\sum_{k=0}^{N-1} \frac{\lambda_k}{\lambda_k + \sigma^2} WV_{\varphi_k}^{(\cdot)}[t, \nu] \right] \quad [3.8]$$

$$\Lambda_D = \frac{2}{N} \sum_{t,\nu=0}^{N-1} \operatorname{Re}\{WV_{xm}^{(\cdot)}[t, \nu]\} \left[\sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{\lambda_k + \sigma^2} WV_{\varphi_k}^{(\cdot)}[t, \nu] \right] \quad [3.9]$$

faisant intervenir la distribution de Wigner-Ville discrète, notée $WV_{xy}^{(\cdot)}$ pour désigner les définitions [3.1] et/ou [3.2], sont équivalentes à [3.5] et [3.6] à condition que la loi de conservation du produit scalaire qui suit soit satisfaite :

$$\begin{aligned} & \sum_{t,\nu=0}^{N-1} WV_{x_1 y_1}^{(\cdot)}[t, \nu] \left(WV_{x_2 y_2}^{(\cdot)}[t, \nu] \right)^* \\ &= N \left[\sum_{t=0}^{N-1} x_1[t] x_2^*[t] \right] \left[\sum_{t=0}^{N-1} y_1[t] y_2^*[t] \right]^* \end{aligned} \quad [3.10]$$

Si une relation équivalente à [3.10] existe bel et bien dans le cas continu, la validité de cette propriété dépend en revanche, dans le cas discret, de la définition attribuée à la distribution de Wigner-Ville. On démontre aisément que la distribution de Richman *et al.* assure la conservation du produit scalaire [RICH 98] et garantit en conséquence l'optimalité de la règle de décision combinant [3.8] et [3.9]. A cela s'ajoute sa propriété de covariance par rapport aux translations dans le plan temps-fréquence, qui facilite la prise en considération de l'instant d'arrivée et de la fréquence initiale de l'événement à détecter en termes de paramètres de nuisance [SAY 95]. En revanche, la distribution classique ne vérifie pas la loi de conservation [3.10]. L'optimalité du détecteur temps-fréquence considéré jusqu'ici n'est donc plus assurée dans ces conditions. Il apparaît ainsi clairement que l'optimalité d'une règle de décision établie sur la base de la distribution de Wigner-Ville continue n'est pas garantie lorsqu'on la transpose au cas des signaux discrets sans précautions préalables, ce qu'illustre la figure 3.1. Il s'avère donc indispensable d'étudier préalablement les propriétés de la distribution de Wigner-Ville discrète adoptée, la définition classique étant souvent moins intéressante de ce point de vue que celle de Richman *et al.*, si l'on s'en tient à ces deux distributions. Le lecteur intéressé par le cas de la distribution discrète proposée par Stanković [STA 94, STA 01] est invité à consulter [RIC 02a].

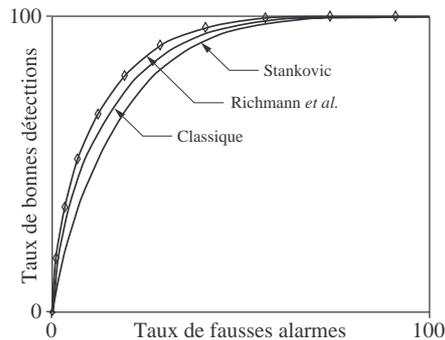


Figure 3.1. Détection d'un signal aléatoire gaussien noyé dans un bruit blanc, gaussien et centré. Sont ici comparées les courbes COR des détecteurs du type [3.8]-[3.9] opérant sur les distributions classique et de Richman *et al.* En complément, les performances de cette même structure de détection opérant cette fois sur la distribution de Wigner-Ville discrète proposée par Stanković [STA 94, STA 01] sont également indiquées. A titre de repère, les ◇ indiquent les performances du détecteur de Bayes.

3.3. Détection à structure imposée par distributions de Wigner-Ville

L'élaboration d'un détecteur optimal nécessite la connaissance des propriétés statistiques de l'échantillon, conditionnellement à chacune des hypothèses en

compétition. Celles-ci étant généralement inaccessibles lorsque l'on sort d'un cadre théorique tel que celui qui vient d'être dressé, on est couramment amené à leur substituer un autre type d'information *a priori*. Lorsqu'une expertise des phénomènes observés est disponible, il peut être aisé de recueillir des données pour lesquelles un ou plusieurs experts ont fourni un étiquetage. Cet ensemble de données étiquetées, appelé *base d'apprentissage*, peut être utilisé à des fins d'élaboration d'une règle de décision. Pour ce faire, une démarche envisageable, néanmoins sous-optimale, consiste à 1) sélectionner une classe de détecteurs \mathcal{C} , puis 2) rechercher dans \mathcal{C} la structure de détection qui minimise un critère de performance donné tel qu'une estimation de la probabilité d'erreur. Nous allons à présent adopter ce point de vue propre à la *détection à structure imposée* dans le contexte temps-fréquence. Pour d'évidentes raisons pratiques, la discussion qui suit est limitée à la classe \mathcal{C} des détecteurs linéaires opérant sur une distribution de Wigner-Ville discrète, c'est-à-dire de la forme :

$$\sum_{t,\nu=0}^{N-1} A[t,\nu] WV_x^{(\cdot)}[t,\nu] \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \gamma_0 \quad [3.11]$$

Dans cette expression, les $A[t,\nu]$ et γ_0 désignent les paramètres devant être déterminés à partir de l'information *a priori* disponible, dans notre cas un ensemble d'apprentissage. Il est à noter que ce type de structure de détection a été largement pris en considération dans la littérature, principalement parce qu'il confère au détecteur quadratique classique une interprétabilité accrue.

Afin de discuter du choix de $WV_{xy}^{(C)}$ ou $WV_{xy}^{(R)}$ qui pourrait garantir à la structure de détection [3.11] les meilleures performances, nous allons comparer les classes de détecteurs temps-fréquence linéaires, notées respectivement $\mathcal{C}^{(C)}$ et $\mathcal{C}^{(R)}$, que l'on peut générer dans chacun de ces cas. Pour cela, nous allons, dans un premier temps, nous intéresser à la redondance linéaire de l'information que ces deux distributions véhiculent. Ce résultat sera alors utilisé pour caractériser leur comportement dans un contexte décisionnel, en particulier lorsque l'on se trouve confronté au phénomène de malédiction de la dimensionnalité.

3.3.1. Espaces linéaires, espaces induits et bases

La redondance linéaire présente dans les représentations $WV_{xy}^{(C)}$ et $WV_{xy}^{(R)}$ peut être mise en évidence, si elle existe, en montrant que la dimension de l'espace qu'elles engendrent est inférieure au nombre de leurs composantes. Pour cette étude, il s'avère nécessaire de définir un cadre algébrique approprié. En conséquence, nous allons préalablement présenter quelques rappels d'algèbre linéaire et définir brièvement la notion d'espace linéaire induit.

Un espace signal \mathcal{S} est dit linéaire sur le corps des complexes \mathbb{C} s'il vérifie la propriété suivante : quels que soient x et y des éléments de \mathcal{S} et (α, β) un couple de

scalaires complexes, l'élément défini par $(\alpha x + \beta y)$ appartient également à \mathcal{S} . Soit $\{s_q\}$ un sous-ensemble non vide de \mathcal{S} . On dit qu'il constitue une base de \mathcal{S} si les s_q sont linéairement indépendants et s'ils engendrent \mathcal{S} . La dimension de cet espace est alors donnée par le cardinal de la base $\{s_q\}$. Il est à noter que cette dernière est dite orthonormée si $\langle s_q | s_{q'} \rangle = \delta_{qq'}$, où $\langle s_q | s_{q'} \rangle$ désigne le produit scalaire de s_q et $s_{q'}$ donné par $\sum_t s_q[t] s_{q'}^*[t]$, et $\delta_{qq'}$ le symbole de Kronecker. Tout élément x de \mathcal{S} peut alors être représenté par $x = \sum_q \alpha_q s_q$, avec $\alpha_q = \langle x | s_q \rangle$. Dans le cadre de ce chapitre, sauf s'il est fait mention du contraire, nous supposons que \mathcal{S} désigne l'espace linéaire sur \mathbb{C} des signaux complexes de longueur N , c'est-à-dire \mathbb{C}^N .

Soit $\mathbf{w}^{(\cdot)}$ l'application associant $WV_{xy}^{(\cdot)}$ à tout couple (x, y) de signaux complexes. On désigne par $\mathcal{W}^{(\cdot)}$ l'image de $\mathbf{w}^{(\cdot)}$, soit :

$$\mathcal{W}^{(\cdot)} \triangleq \left\{ WV_{xy}^{(\cdot)} : WV_{xy}^{(\cdot)} = \mathbf{w}^{(\cdot)}(x, y) \text{ avec } x, y \in \mathbb{C}^N \right\} \quad [3.12]$$

On remarque que $\mathcal{W}^{(\cdot)}$ n'est pas un espace linéaire puisque toute combinaison linéaire de distributions de Wigner-Ville discrètes n'est pas nécessairement une distribution de Wigner-Ville discrète valide. N'étant donc pas autorisé à parler de bases et de dimension pour $\mathcal{W}^{(\cdot)}$, on lui associe l'espace linéaire regroupant toutes les combinaisons linéaires de distributions de Wigner-Ville discrètes sur \mathbb{C} , que l'on note $\tilde{\mathcal{W}}^{(\cdot)}$. Ce dernier est appelé *espace linéaire induit* [HLA 92]. La dimension de $\tilde{\mathcal{W}}^{(\cdot)}$ est évidemment donnée par le cardinal de toute base de cet espace linéaire et le produit scalaire y est défini ainsi :

$$\langle WV_{xy}^{(\cdot)} | WV_{x'y'}^{(\cdot)} \rangle = \sum_{t, \nu=0}^{N-1} WV_{xy}^{(\cdot)}[t, \nu] [WV_{x'y'}^{(\cdot)}[t, \nu]]^* \quad [3.13]$$

L'objectif de la section suivante est d'exhiber des bases pour $\tilde{\mathcal{W}}^{(C)}$ et $\tilde{\mathcal{W}}^{(R)}$ afin d'évaluer la dimension de ces espaces, et éventuellement de mettre en évidence la redondance informationnelle des éléments qui les constituent.

3.3.2. Comparaison des approches

Après ces brefs rappels d'algèbre linéaire, nous disposons à présent de tous les éléments de théorie nécessaires à la comparaison des classes de détecteurs temps-fréquence linéaires définies précédemment, à savoir $\mathcal{C}^{(C)}$ et $\mathcal{C}^{(R)}$. Pour ce faire, nous allons exhiber une base pour chacun des espaces linéaires induits $\tilde{\mathcal{W}}^{(C)}$ et $\tilde{\mathcal{W}}^{(R)}$ correspondants afin d'en déterminer la dimension.

On note Δ_{t_0} l'impulsion unité définie par $\Delta_{t_0}[t] = 1$ si $t = t_0$, 0 sinon. Par construction, la distribution de Richman *et al.* peut être réécrite ainsi :

$$WV_{xy}^{(R)} = \sum_{t, \tau=0}^{N-1} x[(t + \tau)_N] y^*[t] WV_{\Delta_{(t+\tau)_N} \Delta_t}^{(R)} \quad [3.14]$$

ce qui nous fournit une famille génératrice pour $\tilde{W}^{(R)}$. On montre aisément qu'il s'agit en fait d'une base orthonormée puisque :

$$\langle WV_{\Delta_{(t+\tau)_N} \Delta_t}^{(R)} | WV_{\Delta_{(t'+\tau')_N} \Delta_{t'}}^{(R)} \rangle = \delta_{tt'} \delta_{\tau\tau'} \quad [3.15]$$

où $\delta_{tt'}$ désigne le symbole de Kronecker. Il s'ensuit que :

$$\dim(\tilde{W}^{(R)}) = \text{card}\{WV_{\Delta_{(t+\tau)_N} \Delta_t}^{(R)}\}_{0 \leq t, \tau \leq N-1} = N^2 \quad [3.16]$$

ce qui signifie que les N^2 composantes $WV_{xy}^{(R)}[t, \nu]$ sont linéairement indépendantes. Après avoir constaté que cette démonstration n'est en rien modifiée lorsque l'on pose $x = y$, on note que ce résultat peut être étendu à l'autodistribution de Wigner-Ville discrète [RIC 02b]. Ceci entraîne directement que $\mathcal{C}^{(R)} \equiv \mathcal{Q}$, où $\mathcal{C}^{(R)}$ désigne la classe des détecteurs temps-fréquence linéaires opérant sur la distribution de Richman *et al.*, et \mathcal{Q} la classe des détecteurs quadratiques définis ainsi :

$$\sum_{t, \tau=0}^{N-1} x[t] Q[t, \tau] x^*[\tau] \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \gamma_0 \quad [3.17]$$

Il est à noter que la matrice Q mentionnée ci-dessus est hermitienne, ce qui a pour conséquence d'assurer le caractère réel de la statistique de détection.

Intéressons-nous à présent à la distribution classique $WV_{xy}^{(C)}$. Dans le but d'exhiber une famille génératrice de l'espace induit qui lui est associée, nous procédons comme précédemment en considérant le développement suivant :

$$WV_{xy}^{(C)} = \sum_{(t, \tau) \in \mathcal{J}} x[t + \tau] y^*[t - \tau] WV_{\Delta_{(t+\tau) \Delta_{(t-\tau)}}}^{(C)} \quad [3.18]$$

où \mathcal{J} désigne l'ensemble des paires (t, τ) telles que $(t + \tau)$ et $(t - \tau)$ appartiennent conjointement à $\{0, \dots, N - 1\}$. Un calcul élémentaire montre alors que :

$$\langle WV_{\Delta_{(t+\tau) \Delta_{(t-\tau)}}}^{(C)} | WV_{\Delta_{(t'+\tau') \Delta_{(t'-\tau')}}}^{(C)} \rangle = \delta_{tt'} \delta_{\tau\tau'} \quad [3.19]$$

ce qui signifie que la famille proposée constitue une base orthonormée de $\tilde{W}^{(C)}$. A présent, évaluons-en le cardinal afin d'obtenir la dimension recherchée. En combinant $0 \leq t + \tau \leq N - 1$ et $0 \leq t - \tau \leq N - 1$, nous obtenons que $-t \leq \tau \leq t$ si $0 \leq t \leq \lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor$, et $-(N - t - 1) \leq \tau \leq (N - n - 1)$ sinon, où $\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor$ représente la partie entière de $\frac{N-1}{2}$. Ces inégalités fournissent directement le résultat escompté :

$$\dim(\tilde{W}^{(C)}) = \sum_{t=0}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} [2t + 1] + \sum_{t=\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor + 1}^{N-1} [2(N - t - 1) + 1] \quad [3.20]$$

soit encore que la dimension de $\tilde{\mathcal{W}}^{(C)}$ est égale à $\lfloor \frac{N^2+1}{2} \rfloor$. Parce que cette valeur est strictement inférieure au nombre N^2 de composantes constituant la représentation considérée, nous en déduisons que l'information qu'elle véhicule est linéairement redondante [RIC 01]. Il en résulte finalement que la classe $\mathcal{C}^{(C)}$ est incluse dans la classe $\mathcal{C}^{(R)}$. En d'autres termes, cette dernière propose un plus large éventail de solutions et est théoriquement toujours à même de fournir un détecteur au moins aussi performant que toute structure de détection issue de la famille $\mathcal{C}^{(C)}$.

3.3.3. Influence de la malédiction de la dimensionnalité

Comme nous l'avons évoqué précédemment, diverses stratégies peuvent être adoptées pour la résolution d'un problème de détection, selon la nature de l'information *a priori* à laquelle on a accès. Dans le cadre de cette section, on suppose disposer d'une base d'apprentissage pour pouvoir ajuster les paramètres caractéristiques d'une structure de détection préalablement sélectionnée. Lorsque l'on adopte une telle démarche, il est bien connu que les performances des détecteurs obtenus sont conditionnées par l'adéquation existant entre la complexité de ceux-ci et la taille de la base d'apprentissage, comme l'illustre la figure 3.2. Ainsi, les récepteurs dotés d'un nombre de degrés de liberté trop important auront un faible pouvoir de généralisation. Dans le cas contraire, ces derniers seront incapables d'intégrer la totalité de l'information discriminante présente dans l'ensemble d'apprentissage. Entre ces extrêmes, il existe une complexité optimale pour laquelle la probabilité d'erreur du détecteur est minimale. Ce comportement de la probabilité d'erreur, que l'on qualifie souvent de *malédiction de la dimensionnalité*, a été formellement identifié par Vapnik et Chervonenkis [VAP 71]. Pour ce faire, ces auteurs ont été amenés à définir la complexité d'une structure de détection au moyen d'une quantité appelée *dimension de Vapnik-Chervonenkis*, ou encore *VC-dimension*. Ce paramètre, ici noté V , peut être utilisé pour estimer la probabilité d'erreur d'une structure de détection d par intervalle de confiance. Ainsi, l'inégalité suivante est satisfaite avec une probabilité égale à $(1 - \epsilon)$:

$$|P_e(d) - P_{emp}(d, \mathcal{A}_M)| \leq \mathcal{E}(M, V, \epsilon) \quad [3.21]$$

où $\mathcal{E}(n, V, \epsilon)$ désigne la largeur de l'intervalle de confiance :

$$\mathcal{E}(n, V, \epsilon) = \sqrt{\frac{V}{M} \left(1 + \log \frac{2M}{V} \right) - \frac{1}{M} \log \frac{\epsilon}{4}} \quad [3.22]$$

Dans les expressions figurant ci-dessus, \mathcal{A}_M désigne un ensemble d'apprentissage constitué de M individus, $P_e(d)$ représente la probabilité d'erreur de d et $P_{emp}(d, \mathcal{A}_M)$ correspond à une estimation de celle-ci reposant sur \mathcal{A}_M . Le cardinal M de l'ensemble d'apprentissage étant généralement fixé, il s'avère souvent nécessaire de contrôler soigneusement la VC-dimension des structures de détection sélectionnées afin de contenir les effets néfastes de la malédiction de la dimensionnalité sur les performances.

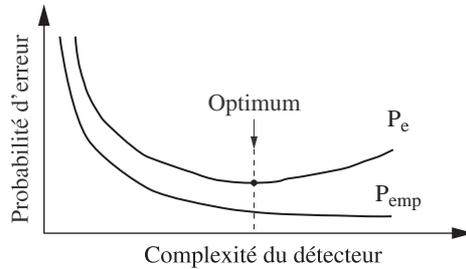


Figure 3.2. Illustration du comportement de la probabilité d'erreur P_e et de la probabilité d'erreur empirique P_{emp} d'un détecteur en fonction de sa complexité. Il est à noter que P_{emp} , qui constitue une estimation de P_e basée sur les données d'apprentissage, est également appelée erreur d'apprentissage.

Généralement, l'estimation de la VC-dimension associée à une famille de détecteurs constitue une tâche difficile. On retiendra toutefois que $V = L + 1$ dans le cas des structures de détection linéaires, où L représente la dimension de l'espace engendré par les données d'apprentissage [DEV 96] ou par leur RTF si les détecteurs considérés opèrent dans le domaine temps-fréquence. À partir des équations [3.16] et [3.20], on obtient alors directement que $V^{(R)} = N^2 + 1$ dans le cas des détecteurs linéaires opérant sur la distribution de Richman *et al.*, tandis que $V^{(C)} = \lfloor (N^2 + 1)/2 \rfloor + 1$ lorsque ce même type de structure est associé à la distribution dite classique. On constate donc que $V^{(R)} > V^{(C)}$, ce qui signifie que les détecteurs de la classe $\mathcal{C}^{(R)}$ sont davantage sujets au phénomène de malédiction de la dimensionnalité. Les éléments de théorie proposés jusqu'à présent ont toujours plaidé en faveur de la distribution de Richman *et al.* En pratique, force est de constater que la confrontation des classes $\mathcal{C}^{(R)}$ et $\mathcal{C}^{(C)}$ peut cependant tourner à l'avantage de la dernière, et cela malgré la perte d'information statistique résultant de l'usage de la distribution classique.

Au moyen de simulations, nous allons à présent mettre en évidence ce phénomène, qui est d'autant plus manifeste que l'ensemble d'apprentissage est de faible cardinalité. Le problème considéré est celui de la détection du signal $s[t] \exp(j\phi_0)$, $t \in \{0, \dots, 15\}$, noyé dans un bruit blanc additif $n[t]$, le rapport signal/bruit étant fixé à -6 dB. Plus précisément, le signal $s[t]$ est supposé déterministe et ϕ_0 désigne une variable aléatoire uniformément distribuée sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$. Le bruit blanc $n[t]$ est caractérisé par la loi $f_n \triangleq (1 - \eta) \mathcal{N}(0, \sigma^2) + \eta \mathcal{N}(0, K^2 \sigma^2)$ avec $\eta = 0,5$ et $K = 5$, où $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ désigne la loi normale de moyenne nulle et de variance σ^2 . Dans un premier temps, des détecteurs temps-fréquence linéaires opérant sur les deux distributions de Wigner-Ville discrètes considérées ont été élaborés suivant l'algorithme présenté dans [RIC 99], à partir d'un ensemble d'apprentissage constitué de 12 000 individus. La comparaison des performances des solutions obtenues, illustrée par la figure 3.3, est conforme aux éléments de théorie présentés au paragraphe 3.3.2 : $\mathcal{C}^{(R)}$

est toujours en mesure de fournir une solution au moins aussi performante que $\mathcal{C}^{(C)}$, à condition que les effets de la malédiction de la dimensionnalité demeurent négligeables. Dans un second temps, l'expérience a été renouvelée avec une base d'apprentissage constituée de 200 individus. La figure 3.4 montre que le détecteur linéaire associé à la distribution de Richman *et al.* présente de moins bonnes performances que celui opérant sur la distribution classique, bien que $\mathcal{C}^{(C)} \subset \mathcal{C}^{(R)}$. Comme cela a été longuement décrit précédemment, le phénomène de malédiction de la dimensionnalité justifie ce surprenant résultat.

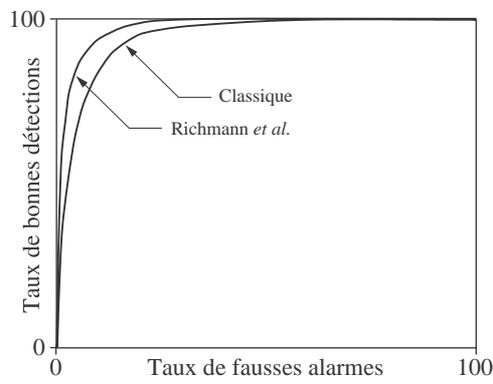


Figure 3.3. Courbes COR montrant que le détecteur de la famille $\mathcal{C}^{(R)}$ est plus performant que celui issu de $\mathcal{C}^{(C)}$. Ces structures de détection ont été synthétisées à partir d'une base d'apprentissage constituée de 12 000 individus

3.4. Distribution de Wigner-Ville discrète classique et redondance

Au cours des développements précédents, nous avons été amenés à démontrer que la dimension de l'espace induit par la distribution classique est égale à $\lfloor (N^2 + 1)/2 \rfloor$, où N désigne le nombre d'échantillons des signaux analysés. La comparaison de cette valeur au nombre N^2 de composantes de la représentation considérée nous enseigne que l'information véhiculée par celle-ci est linéairement redondante. L'objet de cette section est d'étudier cette caractéristique, puis de l'illustrer dans un contexte décisionnel.

Afin d'alléger le texte, $WV_{xy}^{(C)}$ sera dorénavant noté WV_{xy} lorsqu'il s'agit de désigner la distribution de Wigner-Ville discrète classique. Il en est de même pour toutes les notations se rapportant à celle-ci, qui se voient appliquer une modification équivalente. La dimension de l'espace induit par la distribution de Richman *et al.* étant égale à N^2 , cette dernière n'est pas concernée par la propriété étudiée ici. Tout risque de confusion des notations est donc écarté.

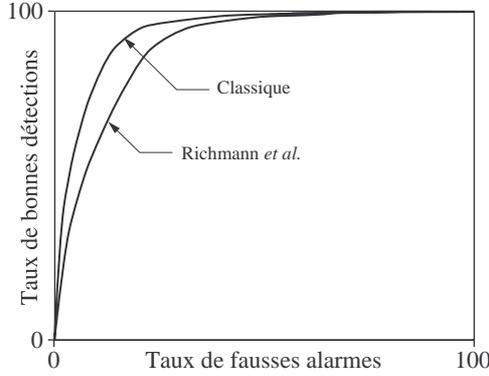


Figure 3.4. Illustration du phénomène de malédiction de la dimensionnalité. Le détecteur provenant de la classe $\mathcal{C}^{(R)}$ présente de moins bonnes performances que celui issu de $\mathcal{C}^{(C)}$ bien que $\mathcal{C}^{(C)} \subset \mathcal{C}^{(R)}$. Ces structures de détection ont été synthétisées à partir d'une base d'apprentissage constituée de 200 individus.

3.4.1. Familles génératrices

Nous avons établi que des relations linéaires connectent les composantes $WV_{xy}[t, \nu]$ de la distribution classique. Ceci signifie qu'il existe des familles \mathcal{L} de lieux temps-fréquence telles que, quels que soient x et $y \in \mathbb{C}^N$, la simple connaissance des composantes regroupées dans $\mathcal{G}_{\mathcal{L}} \triangleq \{WV_{xy}[t, \nu] : (t, \nu) \in \mathcal{L}\}$ permet de reconstruire la totalité de la représentation WV_{xy} . L'objectif de cette section est de caractériser ces familles \mathcal{L} ainsi que les fonctions de reconstruction associées, dont on rappelle qu'elles sont linéaires. Il convient de noter que les résultats obtenus dépendent entièrement de l'espace signal \mathcal{S} considéré, ici \mathbb{C}^N .

On désigne par $R_{xy}[t, \tau] = x[t + \tau]y^*[t - \tau]$ la fonction de corrélation locale. Le support des signaux analysés étant $\{0, \dots, N - 1\}$, nous avons $R_{xy}[t, \tau] = 0$ pour $|\tau| > N_t$, avec $N_t = t$ si $0 \leq t \leq \lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor$ et $N_t = N - t - 1$ sinon. Dans ces conditions, la définition [3.1] de la distribution considérée peut se réécrire sous la forme suivante :

$$WV_{xy}[t, \nu] = \sum_{\tau=-N_t}^{N_t} R_{xy}[t, \tau] e^{-j\frac{2\pi}{N}\nu\tau} \quad [3.23]$$

On peut aisément vérifier qu'il n'existe pas de relations linéaires liant les échantillons $R_{xy}[t, \tau]$ quels que soient $x, y \in \mathbb{C}^N$. Avec la définition [3.23], ceci implique que la redondance informationnelle recherchée se traduit nécessairement par des relations linéaires entre les composantes $WV_{xy}[t, \nu]$ associées à un même instant t , pour chaque $t = 0, \dots, N - 1$.

Soit $t \in \{0, \dots, N-1\}$ un instant donné, et \mathbf{P}_t la matrice définie par les composantes suivantes :

$$\mathbf{P}_t(\nu, \tau) \triangleq \exp\left(\frac{2j\pi\nu(\tau - N_t)}{N}\right) \quad [3.24]$$

avec $\tau \in \{0, \dots, 2N_t\}$ et $\nu \in \{0, \dots, N-1\}$. En utilisant ces notations, la distribution de Wigner-Ville discrète classique peut s'écrire sous la forme matricielle $WV_{xy}[t, :] = \mathbf{P}_t R_{xy}[t, :]$, l'instant t décrivant l'ensemble $\{0, \dots, N-1\}$, avec :

$$\begin{aligned} R_{xy}[t, :] &\triangleq (R_{xy}[t, -N_t] R_{xy}[t, -N_t + 1] \dots R_{xy}[t, N_t - 1] R_{xy}[t, N_t])^T \\ WV_{xy}[t, :] &\triangleq (WV_{xy}[t, 0] WV_{xy}[t, 1] \dots WV_{xy}[t, N-2] WV_{xy}[t, N-1])^T \end{aligned}$$

En adoptant la même approche que celle décrite au paragraphe 3.3.2, on peut aisément démontrer que la famille suivante :

$$\{R_{\Delta(t+\tau)\Delta(t-\tau)}[t, :] : |\tau| \leq N_t\}$$

constitue une base de l'espace linéaire induit par les vecteurs $R_{xy}[t, :]$, x et y étant des éléments de \mathbb{C}^N . L'évaluation de son cardinal nous mène à la conclusion que la dimension de l'espace induit considéré est $2N_t + 1$. De fait, il s'agit également de la dimension de l'espace induit par les $WV_{xy}[t, :]$, ces derniers étant obtenus par transformée de Fourier des $R_{xy}[t, :]$. En conséquence, les familles \mathcal{L} de lieux temps-fréquence remarquables qu'il nous faut caractériser doivent nécessairement comporter $2N_t + 1$ couples (t, ν) pour chaque instant t de $\{0, \dots, N-1\}$.

Soit $\mathcal{L}_t \triangleq \{(t, \nu_0), \dots, (t, \nu_{2N_t})\}$ un ensemble constitué de $2N_t + 1$ lieux temps-fréquence distincts, supposés candidats pour une appartenance à \mathcal{L} . Le vecteur $WV_{xy}[t, :]$ peut être partitionné selon deux vecteurs $WV_{xy, \mathcal{L}}[t, :]$ et $WV_{xy, \bar{\mathcal{L}}}[t, :]$, de sorte que $WV_{xy, \mathcal{L}}[t, :]$ regroupe les composantes désignées par \mathcal{L}_t . En réordonnant si nécessaire les lignes de $WV_{xy}[t, :]$, $R_{xy}[t, :]$ et \mathbf{P}_t , la relation $WV_{xy}[t, :] = \mathbf{P}_t R_{xy}[t, :]$ peut être réécrite sous la forme :

$$\begin{pmatrix} WV_{xy, \mathcal{L}}[t, :] \\ WV_{xy, \bar{\mathcal{L}}}[t, :] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{t, \mathcal{L}} \\ \mathbf{P}_{t, \bar{\mathcal{L}}} \end{pmatrix} R_{xy}[t, :] \quad [3.25]$$

Dans l'expression ci-dessus, $\mathbf{P}_{t, \mathcal{L}}$ désigne la sous-matrice de \mathbf{P}_t vérifiant $WV_{xy, \mathcal{L}}[t, :] = \mathbf{P}_{t, \mathcal{L}} R_{xy}[t, :]$, c'est-à-dire :

$$\mathbf{P}_{t, \mathcal{L}} = \begin{pmatrix} \exp\left(\frac{2j\pi\nu_0(-N_t)}{N}\right) & \dots & \exp\left(\frac{2j\pi\nu_0 N_t}{N}\right) \\ \exp\left(\frac{2j\pi\nu_1(-N_t)}{N}\right) & \dots & \exp\left(\frac{2j\pi\nu_1 N_t}{N}\right) \\ \vdots & & \vdots \\ \exp\left(\frac{2j\pi\nu_{2N_t}(-N_t)}{N}\right) & \dots & \exp\left(\frac{2j\pi\nu_{2N_t} N_t}{N}\right) \end{pmatrix}$$

On rappelle que les vecteurs $R_{xy}[t, :]$ induisent un espace linéaire de dimension $2N_t + 1$. Il ne peut en être de même pour l'espace induit par les vecteurs $WV_{xy, \mathcal{L}}[t, :]$ que si et seulement si la matrice $\mathbf{P}_{t, \mathcal{L}}$ est non singulière. Afin d'exhiber les possibles contraintes que cette non-singularité impose sur \mathcal{L}_t , évaluons donc le déterminant de $\mathbf{P}_{t, \mathcal{L}}$. Celui-ci peut s'écrire sous la forme suivante :

$$|\mathbf{P}_{t, \mathcal{L}}| = V(\nu_0, \dots, \nu_{2N_t}) \prod_{i=0}^{2N_t} \exp\left(-\frac{2j\pi\nu_i N_t}{N}\right)$$

avec :

$$V(\nu_0, \dots, \nu_{2N_t}) = \begin{vmatrix} 1 & \exp\left(\frac{2j\pi\nu_0}{N}\right) & \dots & \exp\left(\frac{2j\pi\nu_0 2N_t}{N}\right) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \exp\left(\frac{2j\pi\nu_{2N_t}}{N}\right) & \dots & \exp\left(\frac{2j\pi\nu_{2N_t} 2N_t}{N}\right) \end{vmatrix}$$

On constate que $V(\nu_0, \dots, \nu_{2N_t})$ est un déterminant de Vandermonde dont la valeur est donnée par :

$$V(\nu_0, \dots, \nu_{2N_t}) = \prod_{0 \leq i < k \leq 2N_t} \left[\exp\left(\frac{2j\pi\nu_k}{N}\right) - \exp\left(\frac{2j\pi\nu_i}{N}\right) \right]$$

Puisque $\nu_i \neq \nu_k$ pour $i \neq k$, il en résulte que $V(\nu_0, \dots, \nu_{2N_t}) \neq 0$ et donc que $|\mathbf{P}_{t, \mathcal{L}}| \neq 0$. En conséquence, les vecteurs $WV_{xy, \mathcal{L}}[t, :]$ induisent un espace de dimension $2N_t + 1$, quelle que soit la constitution de la famille \mathcal{L}_t . En d'autres termes, toute représentation WV_{xy} peut être retrouvée en totalité à partir de la simple connaissance, pour chaque instant $t \in \{0, \dots, N-1\}$, de $2N_t + 1$ de ses composantes.

Il est à présent possible de caractériser la relation linéaire $\mathbf{T}_{t, \mathcal{L}}$ permettant de retrouver l'ensemble du vecteur $WV_{xy}[t, :]$ grâce à $2N_t + 1$ de ses composantes. En effet, à partir de la relation [3.25], on a immédiatement :

$$WV_{xy, \bar{\mathcal{L}}}[t, :] = \mathbf{P}_{t, \bar{\mathcal{L}}} R_{xy}[t, :] = \mathbf{P}_{t, \bar{\mathcal{L}}} (\mathbf{P}_{t, \mathcal{L}})^{-1} WV_{xy, \mathcal{L}}[t, :] \quad [3.26]$$

puisque la matrice $\mathbf{P}_{t, \mathcal{L}}$ est non singulière. L'expression de $\mathbf{T}_{t, \mathcal{L}}$ découle directement de ce résultat, tout comme celle de $\mathbf{T}_{\mathcal{L}}$ qui associe les composantes de WV_{xy} à toute famille de générateurs $\mathcal{G}_{\mathcal{L}} \triangleq \{WV_{xy}[t, \nu] : (t, \nu) \in \mathcal{L}\}$.

3.4.2. Cas de l'autodistribution

Dans la section précédente, nous avons étudié la redondance informationnelle de la distribution de Wigner-Ville croisée de signaux complexes. Nous allons à présent restreindre le cadre de cette étude à quelques cas particuliers.

3.4.2.1. Autodistribution de signaux complexes

Le premier exemple considéré concerne l'autodistribution WV_x de signaux complexes. Le lecteur pourra vérifier que la discussion présentée au paragraphe 3.4.1, tout comme les résultats qui en découlent, demeure valide dans le cas présent. La figure 3.5 vient illustrer ces propos.

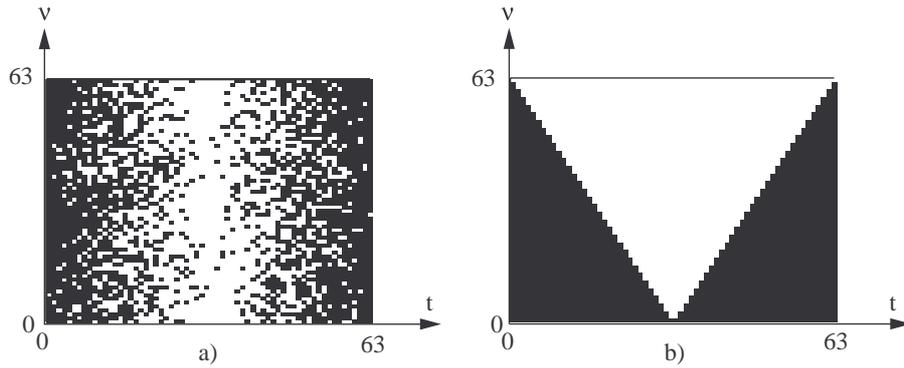


Figure 3.5. Illustration de la redondance informationnelle de l'autodistribution WV_x de signaux complexes. Dans chacun des deux exemples proposés, l'information localisée dans les régions claires peut être retrouvée à partir de celle qui est située dans les régions sombres, via une application linéaire.

3.4.2.2. Autodistribution de signaux réels

Contrairement au cas précédent, l'étude de l'autodistribution WV_x appliquée aux signaux réels nécessite quelques aménagements des éléments de théorie exposés jusqu'à présent. Il en est par exemple ainsi pour la caractérisation des familles \mathcal{L} de lieux (t, ν) remarquables au sens où elles concentrent la totalité de l'information présente dans toute représentation WV_x . Dorénavant, il convient en effet de tenir compte de la parité de la fonction de corrélation locale, soit $R_x[t, \tau] = R_x[t, -\tau]$, ce qui a pour conséquence de modifier le développement [3.18] ayant servi de support à l'étude de la distribution croisée. Celui-ci devient :

$$WV_x = \sum_{t=0}^{N-1} R_x[t, 0] WV_{\Delta_t} + \sum_{\substack{(t,\tau) \in \mathcal{J} \\ \tau > 0}} R_x[t, \tau] (WV_{\Delta_{(t+\tau)\Delta_{(t-\tau)}}} + WV_{\Delta_{(t-\tau)\Delta_{(t+\tau)}}})$$

On peut aisément montrer que les éléments de la famille génératrice exhibée ici sont linéairement indépendants, conférant ainsi à celle-ci le rôle de base. Comme auparavant, nous pouvons donc en évaluer le cardinal afin d'obtenir le nombre de composantes $WV_x[t, \nu]$ nécessaire et suffisant à la reconstruction de toute représentation WV_x . En combinant les trois conditions $0 \leq t + \tau \leq N - 1$, $0 \leq t - \tau \leq N - 1$

et $\tau \geq 0$, nous obtenons que $0 \leq \tau \leq t$ si $0 \leq t \leq \lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor$ et $0 \leq \tau \leq (N-t-1)$ sinon. Ces inégalités conduisent au résultat suivant :

$$\sum_{t=0}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} [t+1] + \sum_{t=\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor+1}^{N-1} [(N-t-1)+1] = \left\lfloor \frac{(N+1)^2}{4} \right\rfloor$$

qui constitue le cardinal de tout ensemble \mathcal{L} de lieux (t, ν) remarquables. A la lumière des résultats évoqués dans la section précédente et illustrés par la figure 3.5, nous pouvons constater la nette décroissance de cette valeur. Il s'agit d'une conséquence directe de la relation $R_x[t, \tau] = R_x[t, -\tau]$, qui implique que $WV_x[t, \nu] = WV_x[t, N-\nu]$ dans le cas des signaux réels. Pour ce qui est de la caractérisation des familles de lieux \mathcal{L} , l'approche proposée au paragraphe 3.4.1 peut être adoptée ici sans remaniements majeurs, comme cela est montré dans [RIC 01]. Ainsi, après une modification mineure de la définition [3.24] de la matrice \mathbf{P} , on peut montrer que toute représentation WV_x peut être retrouvée en totalité à partir de la simple connaissance, pour chaque instant $t \in \{0, \dots, N-1\}$, de $N_t + 1$ de ses composantes. Il est à noter que ces dernières doivent être toutes distinctes, ce qui sous-entend que les composantes du type $WV_x[t, \nu]$ et $WV_x[t, N-\nu]$ ne peuvent être conjointement sélectionnées pour constituer une famille $\mathcal{G}_{\mathcal{L}} \triangleq \{WV_{xy}[t, \nu] : (t, \nu) \in \mathcal{L}\}$ de générateurs valide. Enfin, on montre que la relation de reconstruction [3.26], reposant sur des expressions quelque peu modifiées des sous-matrices $\mathbf{P}_{t, \mathcal{L}}$ et $\mathbf{P}_{t, \bar{\mathcal{L}}}$ de \mathbf{P} que le lecteur pourra trouver dans [RIC 01], demeure exacte. La figure 3.6 vient illustrer ces propos en présentant un exemple de reconstruction d'une représentation de Wigner-Ville discrète, celle d'un signal réel caractérisé par une modulation de fréquence linéaire, à partir d'une famille de générateurs $\mathcal{G}_{\mathcal{L}}$.

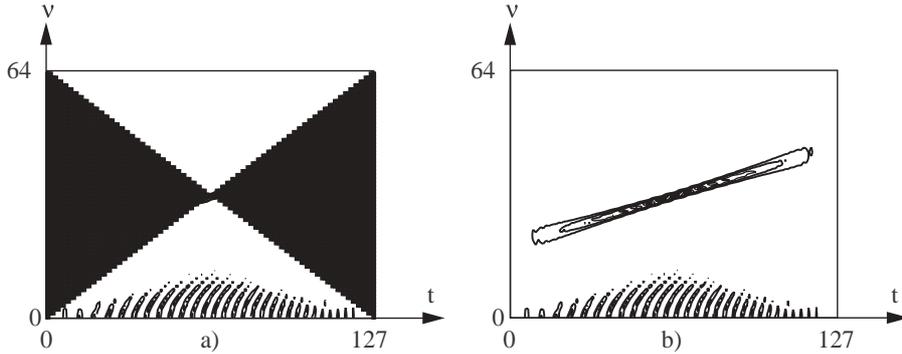


Figure 3.6. Illustration de la redondance informationnelle de l'autodistribution WV_x de signaux réels. L'information non masquée dans (a) permet de reconstruire en totalité la représentation (b), via une application linéaire

3.4.3. Conséquences en détection

Nous venons d'établir qu'il existe des familles \mathcal{L} de lieux temps-fréquence telles que, quel que soit x un élément d'un espace signal \mathcal{S} donné, la simple connaissance des composantes regroupées dans $\mathcal{G}_{\mathcal{L}} \triangleq \{WV_x[t, \nu] : (t, \nu) \in \mathcal{L}\}$ permet de reconstruire la totalité de la représentation WV_x . Cette caractéristique a des conséquences en matière de détection, que nous allons à présent exposer. Pour cela, on s'intéresse aux structures linéaires opérant sur WV_x , dont on rappelle qu'elles sont définies par :

$$\Lambda(x) = \sum_{t, \nu=0}^{N-1} A[t, \nu] WV_x[t, \nu] \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \gamma_0 \quad [3.27]$$

où A et γ_0 désignent des paramètres devant être déterminés à partir de l'information *a priori* disponible. Etant donné A , nous allons modifier l'expression [3.27] afin que ne soit exploitée que l'information véhiculée par un ensemble quelconque de générateurs $\mathcal{G}_{\mathcal{L}}$. En adoptant les mêmes notations que celles employées dans les sections précédentes, la statistique de détection $\Lambda(x)$ peut être décomposée selon $\Lambda(x) = \sum_t \Lambda_t(x)$ avec $\Lambda_t(x) = \langle WV_x[t, :] | A[t, :] \rangle$, soit encore $\Lambda_t(x) = \langle WV_{x, \mathcal{L}}[t, :] | A_{\mathcal{L}}[t, :] \rangle + \langle WV_{x, \bar{\mathcal{L}}}[t, :] | A_{\bar{\mathcal{L}}}[t, :] \rangle$. On note $WV_{x, \bar{\mathcal{L}}}[t, :] = \mathbf{T}_{t, \mathcal{L}} WV_{x, \mathcal{L}}[t, :]$. Dans ces conditions, nous avons :

$$\Lambda_t(x) = \langle WV_{x, \mathcal{L}}[t, :] | A_{\mathcal{L}}[t, :] \rangle + (\mathbf{T}_{t, \mathcal{L}})^T A_{\bar{\mathcal{L}}}[t, :] \rangle \quad [3.28]$$

Ceci indique que toute structure de détection linéaire opérant sur WV_x peut être reformulée selon :

$$\Lambda(x) = \sum_{(t, \nu) \in \mathcal{L}} B_{\mathcal{L}}[t, \nu] WV_x[t, \nu] \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \gamma_0 \quad [3.29]$$

avec $B_{\mathcal{L}}[t, :] = A_{\mathcal{L}}[t, :] + (\mathbf{T}_{t, \mathcal{L}})^T A_{\bar{\mathcal{L}}}[t, :]$ pour chaque instant $t \in \{0, \dots, N-1\}$. Réciproquement, chaque composante du vecteur $A[t, :]$ peut être calculée à partir de $B_{\mathcal{L}}[t, :]$ en résolvant le système linéaire :

$$B_{\mathcal{L}}[t, :] = A_{\mathcal{L}}[t, :] + (\mathbf{T}_{t, \mathcal{L}})^T A_{\bar{\mathcal{L}}}[t, :] \quad [3.30]$$

avec $A_{\bar{\mathcal{L}}}[t, :] = \mathbf{T}_{t, \mathcal{L}} A_{\mathcal{L}}[t, :]$, pour chaque $t \in \{0, \dots, N-1\}$. En effet :

$$\begin{aligned} & \langle WV_{x, \mathcal{L}}[t, :] | B_{\mathcal{L}}[t, :] \rangle \\ &= \langle WV_{x, \mathcal{L}}[t, :] | A_{\mathcal{L}}[t, :] + (\mathbf{T}_{t, \mathcal{L}})^T A_{\bar{\mathcal{L}}}[t, :] \rangle \\ &= \langle WV_{x, \mathcal{L}}[t, :] | A_{\mathcal{L}}[t, :] \rangle + \langle WV_{x, \bar{\mathcal{L}}}[t, :] | A_{\bar{\mathcal{L}}}[t, :] \rangle \\ &= \langle WV_x[t, :] | A[t, :] \rangle \end{aligned}$$

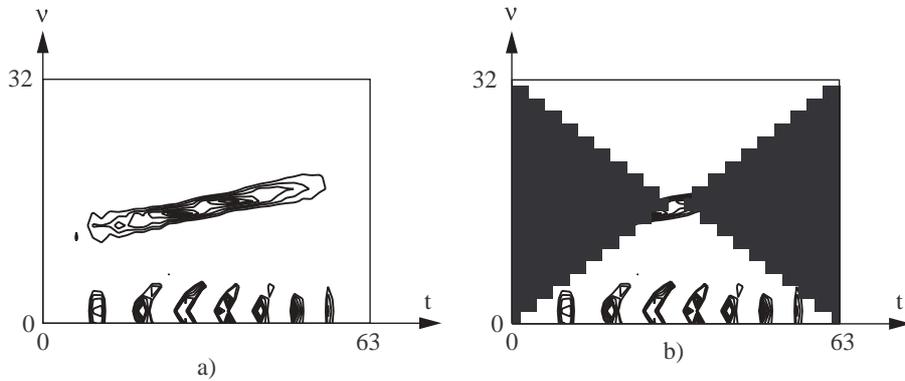


Figure 3.7. Représentations (a) de Wigner-Ville du signal à détecter et (b) de la famille de générateur $\mathcal{G}_{\mathcal{L}}$ utilisée pour la synthèse d'une structure de détection linéaire

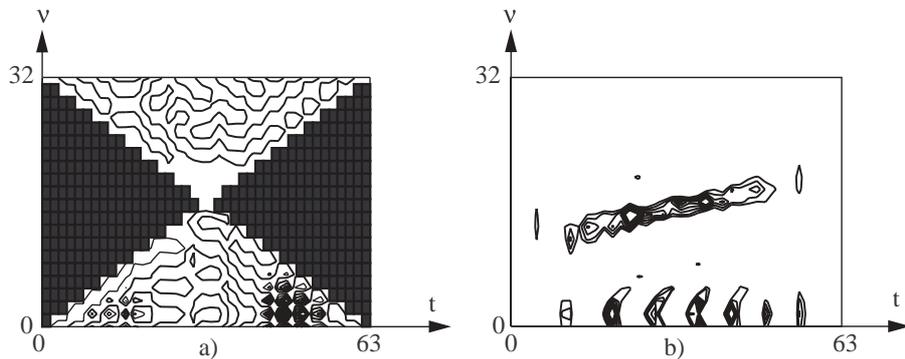


Figure 3.8. Configurations des structures de détection linéaires opérant (a) sur la famille de générateurs $\mathcal{G}_{\mathcal{L}}$ et (b) sur l'ensemble du plan temps-fréquence. La seconde a été obtenue à partir de la première, au moyen d'une application linéaire

Au moyen de simulations, nous allons à présent illustrer cette discussion relative à l'équivalence des configurations [3.27] et [3.29]. Le problème de détection considéré concerne la détection, dans un bruit blanc gaussien $n[t]$, du signal $s[t] \exp(j\phi_0)$, $t \in \{0, \dots, 15\}$, où ϕ_0 désigne une phase aléatoire uniformément distribuée sur l'intervalle $[-\pi, \pi[$. La représentation de Wigner-Ville du signal $s[t]$ est présentée en figure 3.7a. Dans un premier temps, le détecteur [3.29] opérant sur la famille de générateurs $\mathcal{G}_{\mathcal{L}}$ représentée en figure 3.7b a été élaboré suivant l'algorithme présenté dans [RIC 99], à partir d'un ensemble d'apprentissage composé de 10 200 individus. La

figure 3.8a montre la référence $B_{\mathcal{L}}$ résultante qui, en l'état, ne se prête à aucune interprétation aisée. En conséquence, le système [3.30] a été résolu afin de déterminer la configuration [3.27] associée, qui opère sur l'ensemble de la représentation. Il convient de constater que le résultat obtenu, proposé en figure 3.8b, présente des similitudes marquées avec la représentation de Wigner-Ville du signal à détecter. Ce fait confère au détecteur correspondant les caractéristiques d'un filtre adapté temps-fréquence, ce qui est conforme à la théorie compte tenu du problème de détection considéré. Evidemment, les structures de détection [3.27] et [3.29] présentent les mêmes performances.

3.5. Bibliographie

- [CHA 98] CHASSANDE-MOTTIN E., Méthodes de réallocation dans le plan temps-fréquence pour l'analyse et le traitement de signaux non stationnaires, Thèse de doctorat, Ecole normale supérieure de Lyon, 1998.
- [COS 01] COSTA A.H., BOUDREAUX-BARTEL G.F., « An overview of aliasing errors in discrete-time formulations of time-frequency representations », *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 47, p. 1463-1474, 2001.
- [DAV 00] DAVY M., Noyaux optimisés pour la classification dans le plan temps-fréquence, Thèse de doctorat, Université de Nantes, 2000.
- [DEV 96] DEVROYE L., GYÖRFI L., LUGOSI G., *A Probabilistic Theory of Pattern Recognition*, Applications of Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [FLA 88] FLANDRIN P., « A time-frequency formulation of optimum detection », *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 36, p. 1377-1384, 1988.
- [FLA 98] FLANDRIN P., *Temps-fréquence*, deuxième édition, Hermès, Paris, 1998.
- [HLA 92] HLAWATSCH F., KRATTENTHALER W., « Bilinear signal synthesis », *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 40, p. 352-363, 1992.
- [LEM 95] LEMOINE O., Détection des signaux non stationnaires par représentation temps-fréquence, Thèse de doctorat, Université de Nice-Sophia Antipolis, 1995.
- [MAT 98] MATZ G., HLAWATSCH F., « Time-frequency methods for signal detection with application to the detection of knock in car engines », dans *Proceedings of the IEEE-SP Workshop on Statistical Signal and Array Processing*, p. 196-199, Portland, 1998.
- [ONE 99a] O'NEILL J.C., FLANDRIN P., WILLIAMS W.J., « On the existence of discrete Wigner distributions », *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 6, p. 304-306, 1999.
- [ONE 99b] O'NEILL J.C., WILLIAMS W.J., « Shift covariant time-frequency distributions of discrete signals », *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 47, p. 789-799, 1999.
- [PEY 86] PEYRIN F., PROST P., « A unified definition for the discrete-time discrete-frequency, and discrete time-frequency Wigner distributions », *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 34, p. 858-867, 1986.
- [RIC 98] RICHARD C., Une méthodologie pour la détection à structure imposée. Applications au plan temps-fréquence, Thèse de doctorat, Université de technologie de Compiègne, 1998.

- [RIC 99] RICHARD C., LENGELLÉ R., « Data-driven design and complexity control of time-frequency detectors », *Signal Processing*, vol. 77, p. 37-48, 1999.
- [RIC 01] RICHARD C., « Linear redundancy of information carried by the discrete Wigner distribution », *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 49, p. 2536-2544, 2001.
- [RIC 02a] RICHARD C., « Time-frequency based detection using discrete-time discrete-frequency Wigner distributions », *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 50, p. 2170-2176, 2002.
- [RIC 02b] RICHARD C., Méthodes à noyau et critères de contraste pour la détection à structure imposée, Habilitation à diriger des recherches, Université de technologie de Compiègne, 2002.
- [RICH 98] RICHMAN M.S., PARKS T.W., SHENOY R.G., « Discrete-time, discrete-frequency, time-frequency analysis », *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 46, p. 1517-1527, 1998.
- [SAY 95] SAYEED A.M., JONES D.L., « Optimal detection using bilinear time-frequency and time-scale representations », *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 43, p. 2872-2883, 1995.
- [STA 94] STANKOVIĆ L., « A method for time-frequency signal analysis », *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 42, p. 225-229, 1994.
- [STA 01] STANKOVIĆ L., DJUROVIĆ I., « A note on “An overview of aliasing errors in discrete-time formulations of time-frequency representations” », *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 49, p. 257-259, 2001.
- [VAP 71] VAPNIK V., CHERVONENKIS A., « On the uniform convergence of relative frequencies events to their probabilities », *Theory of Probabilities and its Applications*, vol. 16, p. 264-280, 1971.