

Discrétisation des détecteurs temps-fréquence Problèmes en découlant et éléments de solution

Cédric RICHARD

Laboratoire de Modélisation et Sécurité des Systèmes, Université de Technologie de Troyes
12 rue Marie Curie, BP 2060, 10010 Troyes cedex, France

cedric.richard@utt.fr

<http://www-lm2s.utt.fr/~richard>

Résumé –

La majorité des scénarios de détection temps-fréquence décrits dans la littérature a été résolue dans le cas où le temps et la fréquence prennent des valeurs continues. En vue de son implémentation sur un ordinateur, le détecteur résultant nécessite toutefois d'être discrétisé. Cette opération peut être lourde de conséquences, les procédures de discrétisation des représentations temps-fréquence étant multiples et pouvant s'accompagner de la perte de propriétés importantes. Cet article est consacré aux détecteurs opérant sur la distribution de Wigner-Ville discrète. Il vise à orienter l'utilisateur dans le choix d'une définition pour cette distribution qui ne bride pas les performances de la structure de décision à laquelle elle sera associée.

Abstract –

Most time-frequency detection scenarios described in the literature were originally solved in the continuous-time continuous-frequency case. However, the resulting receivers need to be discretized before they can be implemented in a computer. This question deserves interest because there exist several approaches for discretizing time-frequency representations, sometimes resulting in a loss of fundamental properties. This paper deals with detectors operating on the discrete Wigner distribution. Our purpose is to select definitions for this discrete distribution which do not affect the performance of the decision device with which they will be associated.

1 État de l'art

En fournissant une caractérisation locale des signaux non stationnaires, les représentations temps-fréquence (RTF) jouent un rôle fondamental en traitement du signal [1, 2]. En particulier, la distribution de Wigner-Ville (WV) est une solution souvent adoptée en raison des nombreuses propriétés qu'elle vérifie [3], parmi lesquelles on peut citer la conservation de l'énergie et des supports au sens large, celles relatives aux distributions marginales temporelle et fréquentielle, la covariance en translation et l'unitarité.

1.1 De la discrétisation des RTF

En vue de l'implémentation de la distribution de WV sur un ordinateur, il est nécessaire d'en donner une définition pour laquelle les variables *temps* et *fréquence* prennent des valeurs discrètes. Différentes approches ont été proposées pour résoudre ce problème non trivial, dont un aperçu est présenté dans [4]. Dans [5], les auteurs font appel à la théorie des groupes. La distribution discrète obtenue, présentée ci-dessous, vérifie des propriétés analogues à celles satisfaites par son homologue à variables continues.

$$W_{xy}^{(1)}[t, f] = \frac{1}{N} \sum_{\tau=0}^{N-1} \sum_{\nu=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \rho_N[\nu, \tau] e^{-j\frac{2\pi}{N}(t\nu+f\tau)} e^{j\frac{2\pi}{N}\nu l} x[(l+\tau)_N] y^*[l]. \quad (1)$$

Dans cette définition, N désigne le nombre d'échantillons des signaux analysés x et y , et la notation $(a)_N$ représente $(a \bmod N)$. Il est à noter que, par le biais de la fonction ρ_N non explicitée ici, l'expression (1) dépend de la parité de N . Dans [6], une approche axiomatique est adoptée. Les auteurs montrent que, selon leur définition, la distribution de WV discrète n'existe que pour les signaux dont le nombre d'échantillons N est impair. Dans ce cas, sa définition est identique à celle donnée en (1). Parmi les autres méthodes proposées, on peut encore citer [7] par exemple, qui étudie de plus le phénomène de repliement inhérent au procédé de discrétisation. Enfin, cette énumération serait incomplète si on ne mentionnait pas la définition figurant dans [8] :

$$W_{xy}^{(2)}[t, f] = \sum_{\tau=0}^{N-1} x[t+\tau] y^*[t-\tau] e^{-j\frac{2\pi}{N}f\tau}. \quad (2)$$

Cette solution, généralement adoptée, présente cependant certains inconvénients par rapport à la définition (1). Elle ne fournit qu'une analyse locale de la bande fréquentielle normalisée $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$. La perte de certaines propriétés telles que l'unitarité est également à déplorer.

1.2 De la détection par RTF

Les méthodes temps-fréquence (TF) offrant un point de vue intéressant pour l'analyse des signaux non stationnaires, elles ont souvent été associées à des dispositifs décisionnels. Une bibliographie sur le sujet peut être trou-

vée dans [9, 10, 11]. Si l'on écarte les solutions reposant sur l'extraction d'attributs des RTF tels que la position d'un pic ou l'encombrement TF d'une composante, de nombreux travaux concernent des structures de détection linéaires opérant sur la distribution de WV du signal observé, ce dernier étant supposé à temps continu [12, 13]. Cette approche est souvent motivée par le désir d'aboutir à un test optimal lorsque la solution du problème rencontré fait appel à une statistique de détection quadratique. Le résultat repose alors sur certaines propriétés vérifiées par la distribution de WV à variables continues, telles que la covariance en translation et l'unitarité. L'implémentation de tels tests sur calculateur n'a été abordée que très rarement dans la littérature. Ce sujet mérite toutefois que l'on s'y intéresse, les procédures de discrétisation de la distribution de WV étant multiples et pouvant s'accompagner de la perte de certaines propriétés.

Cet article est consacré à l'étude des détecteurs opérant sur la distribution de WV discrète. Il vise à orienter l'utilisateur dans le choix d'une définition pour cette distribution qui ne bride pas les performances de la structure de décision à laquelle elle sera associée, par rapport à une approche temporelle classique. Pour des raisons pratiques, ces travaux sont volontairement limités à la définition de la distribution de WV discrète (1) récemment proposée et à la solution classique (2), celles-ci offrant déjà une vision représentative des problèmes qui peuvent être rencontrés. Cet article est organisé ainsi. Dans un premier temps, nous abordons cette question du point de vue de la détection à structure libre en considérant un problème de détection académique particulier [9, 11, 13]. Nous étudions alors l'existence de solutions TF à ce problème reposant sur l'une ou l'autre des définitions de la distribution de WV discrète considérées. Dans un second temps, nous adoptons un point de vue propre à la détection à structure imposée en considérant une classe de détecteurs TF particulière : les structures de détection linéaires opérant sur la distribution de WV discrète. Nous discutons alors du choix de la définition (1) ou (2) qui pourrait garantir les meilleures performances pour un problème donné. Finalement, nous concluons cet article par une synthèse des résultats présentés.

2 Détection à structure libre

Dans cette section, on montre que la définition adoptée pour la distribution de WV discrète joue un rôle fondamental sur les performances du détecteur auquel elle est associée. Le problème de détection que l'on a sélectionné possède une solution dans le plan-fréquence, dont on trouvera une description dans [13]. Celle-ci a été proposée dans le cas où les variables *temps* et *fréquence* sont à valeurs continues. Ce problème est ici traité dans le cas discret :

$$\left. \begin{array}{l} H_0 : x[t] = w[t] \\ H_1 : x[t] = w[t] + s[t] \end{array} \right\}, \quad t \in \{0, \dots, N-1\}, \quad (3)$$

où x désigne une observation discrète et w un bruit blanc gaussien centré de variance σ_0^2 . Le signal s à détecter est supposé gaussien, de moyenne m et de covariance R_s .

2.1 Résolution du problème

Soit \mathcal{B} une base orthonormée de vecteurs propres de la matrice de covariance R_s . On note φ_k le $k^{\text{ème}}$ vecteur de cette base et λ_k la valeur propre de R_s à laquelle il est associé. Le problème de détection (3) admet une solution classique dans \mathcal{B} donnée par

$$l_R + l_D \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \gamma \quad (4)$$

où γ désigne un seuil et

$$l_R = \frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\lambda_k}{\lambda_k + \sigma_0^2} |\tilde{x}[k]|^2, \quad (5)$$

$$l_D = 2 \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{\lambda_k + \sigma_0^2} \operatorname{Re} \{ \tilde{x}[k] \tilde{m}^*[k] \}, \quad (6)$$

avec

$$\tilde{x}[k] = \sum_{t=0}^{N-1} x[t] \varphi_k^*[t], \quad \tilde{m}[k] = \sum_{t=0}^{N-1} m[t] \varphi_k^*[t]. \quad (7)$$

Ce résultat est identique à celui obtenu dans le cas continu, hormis le fait que (7) est alors remplacée par la décomposition de Karhunen-Loève de x et m sur une base de fonctions propres de R_s . Cette analogie avec les résultats présentés dans [13] peut être prolongée en recherchant une formulation temps-fréquence discrète de la règle (4). On note ainsi que les équations (5) et (6) peuvent être réécrites sous la forme¹

$$l_R = \frac{1}{N\sigma_0^2} \sum_{t,f=0}^{N-1} W_x^{(\cdot)}[t, f] \left[\sum_{k=0}^{N-1} \frac{\lambda_k}{\lambda_k + \sigma_0^2} W_{\varphi_k}^{(\cdot)}[t, f] \right] \quad (8)$$

$$l_D = \frac{2}{N} \sum_{t,f=0}^{N-1} \operatorname{Re} \{ W_{xm}^{(\cdot)}[t, f] \} \left[\sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{\lambda_k + \sigma_0^2} W_{\varphi_k}^{(\cdot)}[t, f] \right] \quad (9)$$

à condition que la loi de conservation du produit scalaire suivante soit satisfaite

$$\begin{aligned} & \sum_{t,f=0}^{N-1} W_{x_1 x_2}^{(\cdot)}[t, f] \left(W_{x_3 x_4}^{(\cdot)}[t, f] \right)^* \\ &= N \left[\sum_{t=0}^{N-1} x_1[t] x_3^*[t] \right] \left[\sum_{t=0}^{N-1} x_2[t] x_4^*[t] \right]^*. \end{aligned} \quad (10)$$

Si la distribution de WV continue vérifie une loi équivalente à (10), cette propriété dépend en revanche de la définition adoptée dans le cas discret. En particulier, cette relation est satisfaite par la définition (1), comme cela est démontré dans [5], mais elle ne l'est pas par la définition (2). Il apparaît donc que l'optimalité d'une règle de décision établie sur la distribution de WV continue n'est pas garantie lorsqu'on la transpose au cas des signaux discrets sans précautions préalables. Il s'avère nécessaire d'étudier les propriétés de la distribution de WV discrète adoptée, la définition (1) étant souvent plus intéressante de ce point de vue que la définition (2). A titre de remarque, il convient de noter que le problème (3) admet tout

¹Tout au long du document, $W_{xy}^{(\cdot)}$ remplace $W_{xy}^{(1)}$ et/ou $W_{xy}^{(2)}$.

de même une solution basée sur la distribution de WV discrète (2) :

$$l_R = \frac{1}{N\sigma_0^2} \sum_{t,f=0}^{N-1} \frac{\lambda_t}{\lambda_t + \sigma_0^2} W_{\bar{x}}^{(2)}[t, f], \quad (11)$$

$$l_D = \frac{2}{N} \sum_{t,f=0}^{N-1} \frac{1}{\lambda_t + \sigma_0^2} \operatorname{Re} \left\{ W_{\bar{x}\bar{m}}^{(2)}[t, f] \right\}. \quad (12)$$

L'optimalité du détecteur défini ci-dessus repose sur la distribution marginale temporelle.

2.2 Expérimentations

Dans [13], une formulation TF de la solution du problème classique (3) est présentée, t variant continûment sur un intervalle (T) donné. Dans la section précédente, nous avons montré que cette formulation peut être directement transposée au cas des signaux discrets à condition d'adopter la définition (1), l'emploi de la définition (2) dans la structure de décision (8)-(9) entraînant une chute de ses performances. La Fig. 1 illustre ce résultat en considérant le problème (3) sous sa forme la plus générale, celle de la détection d'un signal aléatoire gaussien $s(t)$ noyé dans un bruit blanc $w(t)$, gaussien et centré.

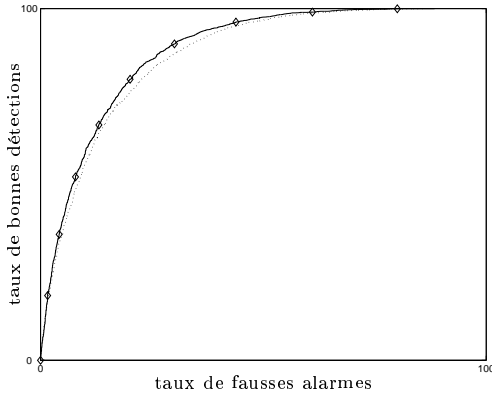


Figure 1: Comparaison des courbes COR de détecteurs du type (8)-(9) opérant sur les définitions (1) et (2) de la distribution de WV discrète, en trait plein et pointillés respectivement. Les losanges (◊) indiquent la courbe COR du détecteur optimal.

3 Détection à structure imposée

La résolution d'un problème de détection telle qu'elle a été présentée précédemment nécessite une connaissance parfaite des propriétés statistiques de l'échantillon, pour chacune des hypothèses en compétition. Cependant, dans un grand nombre d'applications, on ne dispose pas du confort absolu que constitue ce savoir, les phénomènes rencontrés étant complexes et difficilement interprétables. Lorsqu'on ne dispose pour seule source d'information que d'une base de réalisations étiquetées des hypothèses H_0 et H_1 , une démarche envisageable, néanmoins sous-optimale, consiste à définir préalablement la nature de la structure de détection, puis à optimiser les paramètres caractéristiques selon un critère donné [10]. Nous adoptons à présent ce point de vue propre à la *détection à structure imposée* en

nous limitant, pour des raisons pratiques, aux détecteurs TF linéaires définis ainsi

$$\sum_{t,f=0}^{N-1} C[t, f] W_x^{(\cdot)}[t, f] \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \gamma, \quad (13)$$

où C et γ sont des paramètres à déterminer à partir des données d'apprentissage disponibles. Afin de discuter du choix de la définition (1) ou (2) qui pourrait garantir les meilleures performances en détection pour un problème donné, nous allons comparer les classes de détecteurs TF linéaires, notées $\mathcal{C}^{(1)}$ et $\mathcal{C}^{(2)}$, que l'on peut générer à partir de ces 2 distributions. Pour cela, on s'intéresse dans la section suivante à la redondance linéaire des composantes $W_{xy}^{(\cdot)}[t, f]$, puis à celle des composantes $W_x^{(\cdot)}[t, f]$.

3.1 Redondance linéaire des $W_{xy}^{(\cdot)}[t, f]$

La redondance linéaire présente dans les représentations TF considérées peut être mise en évidence, si elle existe, en montrant que la dimension de l'espace qu'elles engendrent est inférieure au nombre de leurs d'éléments. Pour cette étude, il est nécessaire de définir au préalable un cadre algébrique approprié [14].

Soit $\mathbf{w}^{(\cdot)}$ l'application associant $W_{xy}^{(\cdot)}$ à tout couple (x, y) de signaux complexes. Soit $\mathcal{W}^{(\cdot)}$ l'espace image de $\mathbf{w}^{(\cdot)}$:

$$\mathcal{W}^{(\cdot)} \triangleq \left\{ W_{xy}^{(\cdot)} : W_{xy}^{(\cdot)} = \mathbf{w}^{(\cdot)}(x, y), \forall x, y \in \mathbb{C}^N \right\}. \quad (14)$$

Cet espace n'étant pas linéaire, ce qui ne nous autorise pas à parler de dimension au sens strict, on lui associe l'espace linéaire $\widetilde{\mathcal{W}}^{(\cdot)}$ regroupant l'ensemble des combinaisons linéaires des distributions de WV discrètes sur \mathbb{C} .

Afin de déterminer la dimension de $\widetilde{\mathcal{W}}^{(1)}$, exhibons une base de cet espace. Soit Δ_p l'impulsion unité définie par $\Delta_p(m) = 1$ si $p = m$, 0 sinon. À partir de (1), on écrit directement

$$W_{xy}^{(1)} = \sum_{t,\tau=0}^{N-1} x[(t+\tau)_N] y^*[t] W_{\Delta_{(t+\tau)_N} \Delta_t}^{(1)}, \quad (15)$$

ce qui nous fournit une famille génératrice de $\widetilde{\mathcal{W}}^{(1)}$. On peut montrer qu'il s'agit d'une base car on a de plus

$$\langle W_{\Delta_{(t+\tau)_N} \Delta_t}^{(1)} | W_{\Delta_{(t'+\tau')_N} \Delta_{t'}}^{(1)} \rangle = \delta_{tt'} \delta_{\tau\tau'}, \quad (16)$$

où δ désigne le symbole de Kronecker. Il en résulte que

$$\dim \widetilde{\mathcal{W}}^{(1)} = \operatorname{card} \left\{ W_{\Delta_{(t+\tau)_N} \Delta_t}^{(1)} \right\}_{0 \leq t, \tau \leq N-1} = N^2, \quad (17)$$

ce qui signifie que les N^2 éléments $W_{xy}^{(1)}[t, f]$ sont linéairement indépendants. Après avoir constaté que la démonstration esquissée ci-dessus n'est en rien modifiée lorsqu'on pose $x = y$, on note que ce résultat peut être étendu à l'auto-distribution de WV discrète. Ceci entraîne directement que $\mathcal{C}^{(1)} = \mathcal{Q}$, où $\mathcal{C}^{(1)}$ désigne la classe des détecteurs TF linéaires reposant sur la distribution (1), et \mathcal{Q} la classe de détecteurs quadratiques définis par

$$\sum_{t,\tau=0}^{N-1} x[t] Q[t, \tau] x^*[\tau] \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \gamma. \quad (18)$$

La matrice Q présentée ci-dessus est hermitienne, ce qui assure le caractère réel de la statistique de détection.

Le cas de $W_{xy}^{(2)}$ et $W_x^{(2)}$ est traité dans [14]. Il y est démontré que l'information véhiculée par ces distributions est largement redondante, la dimension de $\tilde{W}^{(2)}$ étant égale² à $\lfloor (N^2 + 1)/2 \rfloor$ dans le cas de signaux complexes. Ceci implique que $\mathcal{C}^{(2)} \subset \mathcal{C}^{(1)}$, ce qui signifie que la classe $\mathcal{C}^{(1)}$ propose un éventail plus large de solutions que la classe $\mathcal{C}^{(2)}$, le nombre de degrés de liberté offerts étant plus important.

3.2 Malédiction de la dimensionnalité

Les résultats théoriques présentés dans la section précédente nous enseignent que la classe $\mathcal{C}^{(1)}$ est toujours à même de fournir des structures de détection au moins aussi performantes que celles délivrées par la classe $\mathcal{C}^{(2)}$. En pratique, les performances d'un détecteur obtenu à partir d'une base d'apprentissage sont toutefois conditionnées par l'adéquation existant entre la complexité de celui-ci, formellement définie en théorie de l'apprentissage par la dimension de Vapnik-Chervonenkis, et la taille de cette base [10]. En effet, les récepteurs dotés d'un nombre de degrés de liberté trop important auront un faible pouvoir de généralisation. Dans le cas contraire, ces derniers seront incapables d'intégrer la totalité de l'information statistique présente dans la base d'apprentissage.

Nous allons à présent mettre en évidence ce phénomène. Le problème considéré est celui de la détection du signal $s[t] \cdot \exp(j\phi_0)$, $t \in \{0, \dots, 15\}$, noyé dans un bruit blanc gaussien, où s est déterministe et $\phi_0 \in [0, 2\pi]$ est une phase aléatoire uniformément distribuée. Le détecteur (13) a été déterminé grâce à la méthode du critère optimal [10], en adoptant successivement les définitions (1) et (2), à partir d'une base d'apprentissage constituée de 200 réalisations. Les performances obtenues sont comparées en Fig. 2. Il apparaît sur cette figure que, dans certaines conditions expérimentales, la classe $\mathcal{C}^{(2)}$ fournit parfois la solution la plus performante malgré la perte d'information statistique qui l'accompagne. Ceci s'avère être une conséquence de la malédiction de la dimensionnalité.

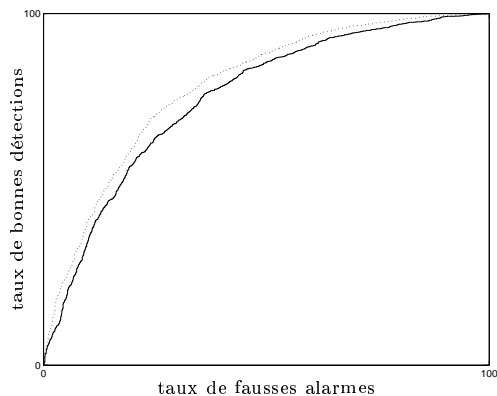


Figure 2: Comparaison des courbes COR des détecteurs TF linéaires opérant sur les définitions (1) et (2) de la distribution de WV discrète, en trait plein et pointillés respectivement.

² $\lfloor a \rfloor$ désigne la partie entière de a .

4 Conclusion

Cet article visait à orienter l'utilisateur dans le choix d'une définition pour la distribution de WV discrète qui ne bride pas les performances de la structure de décision à laquelle elle est associée. Du point de vue de la détection à structure libre, la distribution de Richman *et al.* occupe une position privilégiée dans la mesure où elle vérifie des propriétés analogues à celles satisfaites par son homologue à variables continues. Du point de vue de la détection à structure imposée, cette même distribution conduit en théorie à des structures de détection plus performantes que celles reposant sur la distribution de Claasen et Mecklenbräuer. En pratique, elle présente toutefois une vulnérabilité plus importante face à la malédiction de la dimensionnalité, en raison de la quantité plus importante d'information qu'elle véhicule.

References

- [1] P. Flandrin. *Time-frequency / time-scale analysis*, Academic Press, 1999.
- [2] L. Cohen. *Time-frequency analysis*, Prentice Hall, 1995.
- [3] W. F. G. Mecklenbräuer et F. Hlawatsch. *The Wigner distribution: theory and applications in signal processing*, Elsevier, 1997.
- [4] A. Costa et G. Faye Boudreaux-Bartels. An overview of aliasing errors in discrete-time formulations of time-frequency representations. *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 47, pp. 1463–1474, 1999.
- [5] M. Richman, T. Parks et R. Shenoy. Discrete time, discrete frequency, time-frequency analysis. *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 46, pp. 1517–1527, 1998.
- [6] J. O'Neill, P. Flandrin et W. Williams. On the existence of discrete Wigner distributions. *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 6, pp. 304–306, 1999.
- [7] F. Peyrin et P. Prost. A unified definition for the discrete time discrete frequency, and discrete time-frequency Wigner distributions. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 34, pp. 858–867, 1986.
- [8] T. A. C. M. Claasen et W. F. G. Mecklenbräuer. The Wigner distribution - a tool for time-frequency signal analysis, part II: Discrete-time signals. *Philips Journal of Research*, vol. 35, pp. 276–300, 1980.
- [9] M. Davy. *Noyaux optimisés pour la classification dans le plan temps-fréquence*. Thèse de l'Université de Nantes, 2000.
- [10] C. Richard. *Une Méthodologie pour la détection à structure imposée. Applications au plan temps-fréquence*. Thèse de l'Université de Technologie de Compiègne, 1998.
- [11] O. Lemoine. *Détection des signaux non-stationnaires par représentation temps-fréquence*. Thèse de l'Université de Nice-Sophia Antipolis, 1995.
- [12] A. M. Sayeed et D. L. Jones. Optimal detection using bilinear time-frequency and time-scale representations. *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 43, pp. 2872–2883, 1995.
- [13] P. Flandrin. A time-frequency formulation of optimum detection. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 36, pp. 1377–1384, 1988.
- [14] C. Richard. Linear redundancy of information carried by the discrete Wigner distribution. *IEEE Transactions on Signal Processing*, novembre 2001.