

# Filtrage LMS sur Graphe

## Algorithme et Analyse

Roula NASSIF<sup>1</sup>, Cédric RICHARD<sup>1</sup>, Jie CHEN<sup>2</sup>, Romain COUILLET<sup>3</sup>, Pierre BORGNAT<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire Lagrange, CNRS, OCA  
Université de la Côte d’Azur, 06108 Nice Cedex 2, France

<sup>2</sup>Center of Intelligent Acoustics and Immersive Communications  
Northwestern Polytechnical University, 710072 Xi’an, Chine

<sup>3</sup>Laboratoire de Signaux et Systèmes, CNRS  
CentraleSupélec, Université Paris-Sud, 91192 Gif-sur-Yvette, France

<sup>4</sup>Laboratoire de Physique, CNRS  
École Normale Supérieure de Lyon, 69342 Lyon, France

**Résumé** – Le traitement des signaux sur graphe, apparu discrètement il y a un peu plus de 4 ans connaît depuis peu un essor remarquable. Sa formalisation en cours en tant que généralisation du traitement numérique du signal contribue largement à ce succès récent. Les recherches actuelles se concentrent essentiellement sur les signaux sur graphe statiques par rapport au temps. L’objectif de cette communication est de dépasser cette limitation en proposant une première méthode d’estimation et d’identification par filtrage LMS sur graphe. Ses performances sont analysées théoriquement, et illustrées par des expérimentations sur des données synthétiques.

**Abstract** – Graph signal processing, appeared discretely a little more than 4 years ago, has recently experienced a remarkable rise. Its on-going formalization as a generalization of digital signal processing contributes greatly to this recent success. Current research focuses on graph signals that are static with respect to time. The objective of this paper is to overcome this limitation by proposing a first method of estimation and identification by LMS filtering on graphs. Its performance is analyzed theoretically and illustrated by experiments on synthetic data.

## 1 Introduction

La distribution croissante des systèmes d’acquisition et de traitement des données, ainsi que l’omniprésence des objets connectés, contribuent à l’essor du traitement des signaux sur graphe. Les applications potentielles sont nombreuses et concernent, à titre d’exemple, les réseaux de véhicules, les réseaux de communication et les réseaux de distribution d’énergie. Ces systèmes connectés sont composés d’une flotte d’agents éventuellement autonomes (capteurs, processeurs, actionneurs) liés entre eux par un réseau de communication. Le traitement du signal sur graphe considère les signaux sur un support discret défini par la topologie du graphe. Il se réduit au traitement numérique du signal pour les graphes cycliques dirigés. Chaque nœud correspond alors à un échantillon temporel tandis que les arêtes définissent la relation de causalité. Plusieurs méthodes de traitement du signal ont été redéfinies récemment pour les signaux sur graphe. La formalisation en cours de cette discipline en tant que généralisation du traitement numérique du signal contribue largement à ce succès récent, étant donné les nombreux parallèles qui en facilitent l’appréhension. Ainsi dispose-t-on depuis peu de

résultats nouveaux en échantillonnage [1–4], analyse spectrale [5–8], filtrage [9–12], etc. Il n’en demeure pas moins que certains principes fondamentaux en traitement du signal tels que la stationnarité, tout comme des outils élémentaires tels que la translation temporelle et la modulation, ne trouvent pas encore de définition consensuelle. Voir par exemple [5, 6, 8] pour différents fondements de la notion de stationnarité. Par sa prime jeunesse, cet édifice en construction souffre enfin de l’absence de pans entiers de théories et méthodes largement développées en traitement du signal, offrant par là même autant de domaines à explorer. En particulier, les activités de recherche actuelles se concentrent essentiellement sur le traitement de signaux sur graphe statiques dans leur dimension temporelle malgré le potentiel et l’ancrage naturel de cette nouvelle discipline dans des contextes applicatifs dynamiques. On constate de fait le manque sinon l’inexistence de travaux en identification de systèmes à partir de signaux sur graphe temporels (hormis le filtre de Wiener récemment mais brièvement défini dans [6]), et d’algorithmes de filtrage à même de s’adapter aux évolutions de leurs propriétés statistiques au cours du temps. Seuls quelques rares travaux ont commencé à étudier des signaux dyna-

miques [13, 14]. Pourtant, les flux croissants de données engendrés par les systèmes connectés requièrent une analyse en ligne et en quasi-temps réel afin de s'adapter à des dynamiques variant dans le temps et de répondre aux contraintes des processus chrono-sensibles.

L'objectif de cette communication est de proposer une première méthode d'identification par filtrage LMS sur graphe. La première partie du travail est consacrée à la détermination de l'algorithme tandis que la suite s'intéresse à l'analyse de ses performances et de sa stabilité. La dernière partie illustre l'efficacité de la méthode sur un jeu de données synthétiques.

## 2 Filtrage sur graphe

On considère un graphe  $\mathcal{G}$  constitué d'un ensemble de nœuds  $\mathcal{N}$  de cardinalité  $N$ , et d'un ensemble d'arêtes  $\mathcal{E}$  tel que, si les nœuds  $k$  et  $\ell$  sont connectés, alors  $(k, \ell) \in \mathcal{E}$ . On s'intéresse à l'analyse de signaux sur le graphe  $\mathcal{G}$ , défini par  $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_N]^\top \in \mathbb{R}^N$ . On suppose  $\mathcal{G}$  muni d'un opérateur de translation  $\mathbf{S}$ , défini par une matrice  $\mathbf{S}$  de taille  $N \times N$  dont les composantes  $s_{k\ell}$  ne peuvent être non-nulles que si  $k = \ell$  ou  $(k, \ell) \in \mathcal{E}$ . Des choix possibles pour la matrice  $\mathbf{S}$  sont celles d'adjacence et laplacienne. La matrice  $\mathbf{S}$  définit une application linéaire  $\mathbf{y} = \mathbf{S}\mathbf{x}$  telle que tout nœud  $k$  peut calculer l'échantillon  $y_k$  du signal sur graphe de sortie  $\mathbf{y}$  à partir des échantillons d'entrée  $x_\ell$  disponibles dans son voisinage.

On s'intéresse dans cette communication au problème d'estimation où, étant donné un signal sur graphe  $\mathbf{y}(i)$  observé en sortie d'un système inconnu à l'instant  $i$ , en réponse à un signal sur graphe  $\mathbf{x}(i)$ , il s'agit d'estimer les paramètres d'un filtre de sorte que l'erreur d'estimation minimise un coût donné. Selon la nature des signaux, ce problème peut avoir différentes finalités : identification, prédiction, modélisation inverse, etc. L'opération de filtrage (RIF) sur graphe communément retenue est définie par  $\mathbf{z}(i) = \mathbf{H}\mathbf{x}(i)$  avec :

$$\mathbf{H} = \sum_{m=0}^{M-1} h_m \mathbf{S}^m \quad (1)$$

où  $\{h_m\}$  sont les coefficients du filtre,  $M$  son ordre [9, 15]. Cette définition assure que les opérateurs de translation et de filtrage commutent, soit  $\mathbf{S}\mathbf{H} = \mathbf{H}\mathbf{S}$ . Par ailleurs, on montre que les composantes non-nulles de  $\mathbf{S}^m$  correspondent aux paires de nœuds à même de communiquer en  $m$  sauts sur le graphe [16].

### 2.1 Filtrage optimum

On considère que, à chaque instant  $i$ , le signal désiré  $\mathbf{y}(i)$  est lié au signal sur graphe  $\mathbf{x}(i)$  selon le modèle linéaire :

$$\mathbf{y}(i) = \sum_{m=0}^{M-1} h_m^o \mathbf{S}^m \mathbf{x}(i) + \mathbf{v}(i), \quad i \geq 0, \quad (2)$$

où  $\mathbf{v}(i)$  est un bruit supposé blanc Gaussien de moyenne nulle et de covariance  $\sigma_v^2 \mathbf{I}_N$ , indépendant de tout autre signal. Le filtre optimum  $\mathbf{h}^o \triangleq \text{col}\{h_0^o, \dots, h_{M-1}^o\}$  au sens du maximum de vraisemblance minimise le coût quadratique  $J(\mathbf{h})$  suivant :

$$J(\mathbf{h}) = \mathbb{E} \|\mathbf{y}(i) - \mathbf{X}_s(i)\mathbf{h}\|^2, \quad (3)$$

où  $\mathbf{X}_s(i)$  est une matrice de taille  $N \times M$  définie par :

$$\mathbf{X}_s(i) = [\mathbf{x}(i), \mathbf{S}\mathbf{x}(i), \mathbf{S}^2\mathbf{x}(i), \dots, \mathbf{S}^{M-1}\mathbf{x}(i)]. \quad (4)$$

La solution du problème est obtenue en résolvant :

$$\mathbf{R}_X \mathbf{h}^o = \mathbf{r}_{Xy}, \quad (5)$$

où  $\mathbf{R}_X$  et  $\mathbf{r}_{Xy}$  sont définis par :

$$\mathbf{R}_X = \mathbb{E}\{\mathbf{X}_s^\top(i)\mathbf{X}_s(i)\} \quad \mathbf{r}_{Xy} = \mathbb{E}\{\mathbf{X}_s^\top(i)\mathbf{y}(i)\} \quad (6)$$

où  $\mathbf{R}_X$  est une matrice dont la composante  $(k, \ell)$  est définie par :

$$(\mathbf{R}_X)_{k\ell} = \text{trace}((\mathbf{S}^\top)^{k-1}(\mathbf{S})^{\ell-1}\mathbf{R}_x) \quad (7)$$

avec  $\mathbf{R}_x \triangleq \mathbb{E}\{\mathbf{x}(i)\mathbf{x}^\top(i)\}$ , et  $(\mathbf{r}_{Xy})_k = \text{trace}(\mathbf{S}^{k-1}\mathbf{R}_{xy})$  où  $\mathbf{R}_{xy} \triangleq \mathbb{E}\{\mathbf{y}(i)\mathbf{x}^\top(i)\}$ .

### 2.2 Méthode de gradient (stochastique)

Plutôt que de résoudre le problème via (5), d'inversion coûteuse pour un grand graphe, il est possible de considérer la méthode de descente suivante :

$$\mathbf{h}(i+1) = \mathbf{h}(i) + \mu [\mathbf{r}_{Xy} - \mathbf{R}_X \mathbf{h}(i)], \quad i \geq 0, \quad (8)$$

définie à partir du gradient  $\nabla J(\mathbf{h}(i))$ , où  $\mu > 0$  est un pas supposé constant dont le choix conditionne la stabilité de l'algorithme et ses performances. Les moments d'ordre 2 étant rarement disponibles en pratique, il est nécessaire de les approximer à partir des observations. Différents schémas d'approximation peuvent être envisagés, conduisant à autant d'algorithmes différents. L'un des schémas les plus simples consiste à abandonner les espérances dans les définitions de  $\mathbf{r}_{Xy}$  et  $\mathbf{R}_X$ , en considérant :

$$\mathbf{R}_x \approx \mathbf{x}(i)\mathbf{x}^\top(i), \quad \mathbf{r}_{xy} \approx \mathbf{y}(i)\mathbf{x}(i) \quad (9)$$

L'algorithme (8) devient :

$$\mathbf{h}(i+1) = \mathbf{h}(i) + \mu \mathbf{X}_s^\top(i) [\mathbf{y}(i) - \mathbf{X}_s(i)\mathbf{h}(i)], \quad i \geq 0. \quad (10)$$

Nous nommerons graph-LMS cet algorithme de gradient stochastique. Cet algorithme en ligne est doté d'une capacité de poursuite vis-à-vis des évolutions du système défini par  $\mathbf{h}^o$  et des propriétés statistiques des observations.

## 3 Analyse de l'algorithme

Nous analysons successivement les performances de l'algorithme graph-LMS en moyenne et en écart quadratique par rapport à  $\mathbf{h}^o$ .

### 3.1 Comportement en moyenne

On introduit le vecteur d'erreur  $\tilde{\mathbf{h}}(i) = \mathbf{h}^o - \mathbf{h}(i)$  à l'instant  $i$ . En soustrayant  $\mathbf{h}^o$  des deux membres de (10), et en utilisant le modèle (2), on aboutit à :

$$\begin{aligned} & \tilde{\mathbf{h}}(i+1) \\ &= \mathbf{h}^o - \mathbf{h}(i) - \mu \mathbf{X}_s^\top(i) (\mathbf{y}(i) - \mathbf{X}_s(i) \mathbf{h}(i)) \\ &= \tilde{\mathbf{h}}(i) - \mu \mathbf{X}_s^\top(i) [\mathbf{X}_s(i) \tilde{\mathbf{h}}(i) + \mathbf{v}(i)] \\ &= [\mathbf{I}_M - \mu \mathbf{X}_s^\top(i) \mathbf{X}_s(i)] \tilde{\mathbf{h}}(i) - \mu \mathbf{X}_s^\top(i) \mathbf{v}(i). \end{aligned} \quad (11)$$

En calculant l'espérance de chaque membre de cette expression, on caractérise le comportement en moyenne de l'algorithme, grâce à l'équation d'état qui décrit l'évolution de  $\mathbb{E} \tilde{\mathbf{h}}(i)$  :

$$\mathbb{E} \tilde{\mathbf{h}}(i+1) = (\mathbf{I}_M - \mu \mathbf{R}_X) \mathbb{E} \tilde{\mathbf{h}}(i) \quad (12)$$

Pour obtenir cette expression, on a supposé que le signal sur graphe  $\mathbf{x}(i)$  est indépendant de  $\tilde{\mathbf{h}}(j)$  pour  $i \geq j$ . Cette hypothèse est couramment utilisée pour l'analyse des méthodes adaptatives puisqu'elle simplifie les dérivations sans affecter les conclusions dans une certaine mesure [17].

D'après (12), la convergence en moyenne de l'algorithme est garantie si les valeurs propres de  $(\mathbf{I}_M - \mu \mathbf{R}_X)$  sont dans le disque unité. En conclusion, le graph-LMS converge en moyenne quel que soit  $\tilde{\mathbf{h}}(i)$  si :

$$0 < \mu < 2/\lambda_{\max}(\mathbf{R}_X), \quad (13)$$

où  $\lambda_{\max}(\cdot)$  représente la valeur propre dominante de son argument, qui garantit par ailleurs le caractère non-biaisé de l'estimateur.

### 3.2 Comportement en écart quadratique

On complète enfin l'analyse des performances de l'algorithme en s'intéressant à l'évolution de l'écart quadratique  $\mathbb{E} \|\tilde{\mathbf{h}}(i)\|_{\Sigma}^2$ , où  $\Sigma$  définit la métrique utilisée. À partir de (11), après avoir utilisé l'hypothèse d'indépendance et le fait que  $\mathbf{v}(i)$  est de moyenne nulle, on obtient :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \|\tilde{\mathbf{h}}(i+1)\|_{\Sigma}^2 \\ &= \mathbb{E} \|\tilde{\mathbf{h}}(i)\|_{\Sigma'}^2 + \mu^2 \mathbb{E} \{ \mathbf{v}^\top(i) \mathbf{X}_s(i) \Sigma \mathbf{X}_s^\top(i) \mathbf{v}(i) \} \end{aligned} \quad (14)$$

avec  $\Sigma' \triangleq [\mathbf{I}_M - \mu \mathbf{X}_s^\top(i) \mathbf{X}_s(i)] \Sigma [\mathbf{I}_M - \mu \mathbf{X}_s^\top(i) \mathbf{X}_s(i)]$ . Le second terme du membre de droite s'écrit :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \{ \mathbf{v}^\top(i) \mathbf{X}_s(i) \Sigma \mathbf{X}_s^\top(i) \mathbf{v}(i) \} \\ &= \mathbb{E} \{ \text{trace}(\mathbf{v}^\top(i) \mathbf{X}_s(i) \Sigma \mathbf{X}_s^\top(i) \mathbf{v}(i)) \} \\ &= \mathbb{E} \{ \text{trace}(\Sigma \mathbf{X}_s^\top(i) \mathbf{v}(i) \mathbf{v}^\top(i) \mathbf{X}_s(i)) \} \\ &= \sigma_v^2 \text{trace}(\Sigma \mathbf{R}_X). \end{aligned} \quad (15)$$

Soit  $\boldsymbol{\sigma} \triangleq \text{vec}(\Sigma)$  la représentation lexicographique de  $\Sigma$  obtenue en superposant les colonnes successives de celles-ci. De même, on considère  $\boldsymbol{\sigma}' \triangleq \text{vec}(\Sigma')$ . On montre que

les vecteurs  $\boldsymbol{\sigma}$  et  $\boldsymbol{\sigma}'$  sont liés par une relation linéaire  $\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{F} \boldsymbol{\sigma}$  où  $\mathbf{F}$  est donné par :

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbb{E} \{ (\mathbf{I}_M - \mu \mathbf{X}_s^\top(i) \mathbf{X}_s(i)) \otimes (\mathbf{I}_M - \mu \mathbf{X}_s^\top(i) \mathbf{X}_s(i)) \} \\ &= \mathbf{I}_{M^2} - \mu \mathbf{R}_X \otimes \mathbf{I}_M - \mu \mathbf{I}_M \otimes \mathbf{R}_X \\ &\quad + \mu^2 \mathbb{E} \{ (\mathbf{X}_s^\top(i) \mathbf{X}_s(i)) \otimes (\mathbf{X}_s^\top(i) \mathbf{X}_s(i)) \} \end{aligned} \quad (16)$$

où  $\otimes$  est le produit de Kronecker. L'évaluation de l'espérance ci-dessus nécessite la connaissance des moments d'ordre supérieur du signal sur graphe  $\mathbf{x}(i)$ , qui ne sont pas disponibles selon les hypothèses en cours. Pour des pas  $\mu$  suffisamment petits, l'effet des termes impliquant des puissances de  $\mu$  supérieures à 2 peut être ignorés, et  $\mathbf{F}$  peut être approximé par :

$$\mathbf{F} \approx (\mathbf{I}_M - \mu \mathbf{R}_X) \otimes (\mathbf{I}_M - \mu \mathbf{R}_X). \quad (17)$$

Dans ce cas, le comportement de l'écart quadratique  $\|\tilde{\mathbf{h}}(i)\|_{\Sigma}^2$  décrit par (11) peut être approximé par :

$$\mathbb{E} \|\tilde{\mathbf{h}}(i+1)\|_{\boldsymbol{\sigma}}^2 \approx \mathbb{E} \{ \|\tilde{\mathbf{h}}(i)\|_{\mathbf{F} \boldsymbol{\sigma}}^2 \} + \mu^2 \sigma_v^2 [\text{vec}(\mathbf{R}_X)]^\top \boldsymbol{\sigma}. \quad (18)$$

où la notation  $\|\mathbf{x}\|_{\boldsymbol{\sigma}}$ , comme  $\|\mathbf{x}\|_{\Sigma}^2$  par abus de notation, représente la quantité  $\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{x}$ . On montre que cette suite converge si la condition (13) est vérifiée. Dans ce cas, l'écart quadratique asymptotique est donné par :

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbb{E} \|\tilde{\mathbf{h}}(i)\|_{\boldsymbol{\sigma}}^2 \approx \mu^2 \sigma_v^2 [\text{vec}(\mathbf{R}_X)]^\top (\mathbf{I}_{M^2} - \mathbf{F})^{-1} \boldsymbol{\sigma}. \quad (19)$$

La relation de récurrence (18) permet de déterminer la courbe d'apprentissage  $\zeta(i) \triangleq \mathbb{E} \|\tilde{\mathbf{h}}(i)\|_{\boldsymbol{\sigma}}^2$  de l'algorithme. En effet, en itérant (18) à partir de  $i = 0$ , on obtient :

$$\begin{aligned} & \zeta(i+1) \\ & \approx \mathbb{E} \{ \|\tilde{\mathbf{h}}(0)\|_{\mathbf{F}^{i+1} \boldsymbol{\sigma}}^2 \} + \mu^2 \sigma_v^2 [\text{vec}(\mathbf{R}_X)]^\top \sum_{j=0}^i \mathbf{F}^j \boldsymbol{\sigma}. \end{aligned} \quad (20)$$

En comparant (20) aux instants  $i+1$  et  $i$ , on obtient :

$$\begin{aligned} & \zeta(i+1) \approx \zeta(i) \\ & \quad + \mathbb{E} \{ \|\tilde{\mathbf{h}}(0)\|_{(\mathbf{F}-\mathbf{I}) \mathbf{F}^i \boldsymbol{\sigma}}^2 \} + \mu^2 \sigma_v^2 [\text{vec}(\mathbf{R}_X)]^\top \mathbf{F}^i \boldsymbol{\sigma}. \end{aligned} \quad (21)$$

## 4 Résultats expérimentaux

L'objectif de cette section est de valider les modèles présentés précédemment. On considère pour cela deux graphes circulaires constitués de  $N = 100$  nœuds, représentés à la Figure 1. Le graphe régulier de la Figure 1(a) a été obtenu en connectant chaque nœud à lui-même avec un poids  $-1$ , et à ses 3 voisins de part et d'autre de lui sur le cercle avec des poids générés selon la loi uniforme  $\mathcal{U}(0.5, 1)$  tels que  $\mathbf{S}_{kl} = \mathbf{S}_{lk}$ . Le graphe d'Erdős-Renyi de la Figure 1 (b) a été obtenu en générant une matrice symétrique  $\mathbf{S}'$  de dimensions  $N \times N$  dont les entrées suivent une loi Gaussienne  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Seuls les liens tels que  $1.4 < |\mathbf{S}'_{kl}| < 1.8$  ont été conservés. Puis nous avons constitué la matrice  $\mathbf{S}$  à partir de  $\mathbf{S}'$  en posant  $\mathbf{S}_{kl} = \mathbf{S}'_{kl} + 1.1$  si  $\mathbf{S}'_{kl} < 0$  et

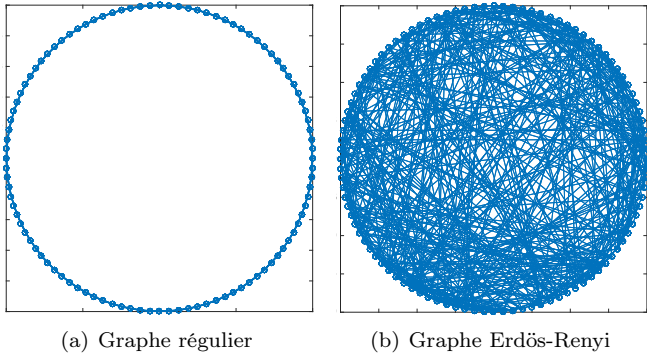


FIGURE 1 – Topologie du graphe circulaire pour  $N = 100$ .

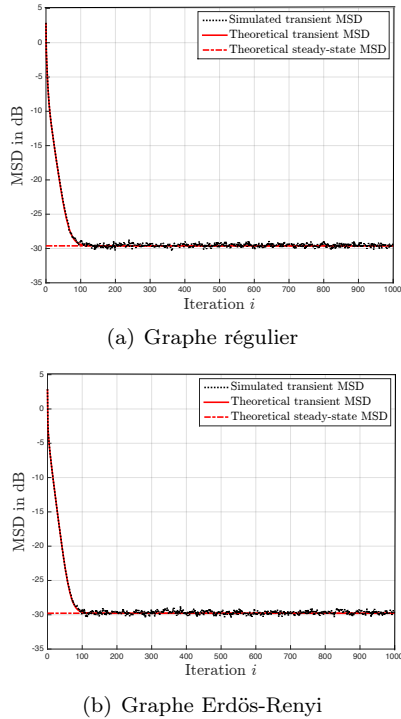


FIGURE 2 – Performances de l'algorithme

$S_{kl} = S'_{kl} - 1.1$  si  $S'_{kl} > 0$ . Les matrices de translation, pour le graphe régulier et le graphe d'Erdős-Rényi, ont été normalisées par leur plus grande valeur propre.

L'ordre  $M$  du modèle recherché a été fixé à 3. Les coefficients  $h_m^o$  de ce filtre ont été générés selon la loi  $\mathcal{U}(0, 1)$ . Le signal d'entrée  $x(i)$  a été généré selon une loi Gaussienne de moyenne nulle et de matrice de covariance  $R_x = \sigma_x^2 \mathbf{I}_N$  avec  $\sigma_x^2 = 1.4$ . Le bruit blanc Gaussien  $v(i)$  a été généré de sorte que  $\sigma_v^2 = 0.11$ . Nous avons fixé le pas de l'algorithme à  $\mu = 0.005$  pour chacune des 2 expérimentations. Les Figures 2(a) et 2(b) présentent la courbe d'apprentissage théorique (21) du filtre, son asymptote théorique (19), ainsi que les valeurs obtenues au terme de 200 simulations de Monte Carlo moyennées. On note que les courbes théoriques et expérimentales se superposent.

## 5 Conclusion

Le traitement des signaux sur graphe faisait peu état jusqu'ici de travaux sur des signaux variants dans le temps. Dans cette communication, nous avons proposé une variante du filtre LMS appliqué à des signaux sur graphe, ce qui constitue une contribution totalement originale. Nous avons étudié ses performances théoriques en régimes transitoire et établi, et observé leur excellente adéquation avec les résultats observés en simulations.

## Références

- [1] S. Chen, R. Varma, A. Sandryhaila, and J. Kovačević, "Discrete signal processing on graphs : Sampling theory," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 63, pp. 6510–6523, Dec 2015.
- [2] A. Anis, A. Gadde, and A. Ortega, "Efficient sampling set selection for bandlimited graph signals using graph spectral proxies," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 64, pp. 3775–3789, July 2016.
- [3] M. Tsitsvero, S. Barbarossa, and P. D. Lorenzo, "Signals on graphs : Uncertainty principle and sampling," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 64, pp. 4845–4860, Sept 2016.
- [4] G. Puy, N. Tremblay, R. Gribonval, and P. Vandergheynst, "Random sampling of bandlimited signals on graphs," *Applied and Computational Harmonic Analysis*, pp. –, 2016.
- [5] B. Girault, P. Gonçalves, and E. Fleury, "Translation on graphs : an isometric shift operator," *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 22, pp. 2416–2420, December 2015.
- [6] N. Perraudin and P. Vandergheynst, "Stationary signal processing on graphs," *CoRR*, vol. abs/1601.02522, 2016.
- [7] S. Segarra, A. G. Marques, G. Leus, and A. Ribeiro, "Stationary graph processes : Nonparametric spectral estimation," in *2016 IEEE Sensor Array and Multichannel Signal Processing Workshop (SAM)*, pp. 1–5, July 2016.
- [8] A. G. Marques, S. Segarra, G. Leus, and A. Ribeiro, "Stationary graph processes and spectral estimation," *CoRR*, vol. abs/1603.04667, 2016.
- [9] D. Shuman, S. Narang, P. Frossard, A. Ortega, and P. Vandergheynst, "The emerging field of signal processing on graphs : Extending high-dimensional data analysis to networks and other irregular domains," *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 30, pp. 83–98, May 2013.
- [10] A. Sandryhaila and J. Moura, "Discrete signal processing on graphs," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 61, pp. 1644–1656, April 2013.
- [11] A. Loukas, A. Simonetto, and G. Leus, "Distributed autoregressive moving average graph filters," *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 22, pp. 1931–1935, Nov 2015.
- [12] E. Isufi, A. Loukas, A. Simonetto, and G. Leus, "Autoregressive moving average graph filtering," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 65, pp. 274–288, Jan 2017.
- [13] J. Mei and J. M. F. Moura, "Signal processing on graphs : Causal modeling of unstructured data," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 65, pp. 2077–2092, April 2017.
- [14] F. Grassi, N. Parraudin, and B. Girault, "Tracking time-vertex propagation using dynamic graph wavelets," in *Proceedings of the 4th IEEE Global Conference on Signal and Information Processing*, Dec. 2016.
- [15] A. Sandryhaila and J. M. F. Moura, "Discrete signal processing on graphs," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 61, pp. 1644–1656, April 2013.
- [16] D. K. Hammond, P. Vandergheynst, and R. Gribonval, "Wavelets on graphs via spectral graph theory," *Applied and Computational Harmonic Analysis*, vol. 30, no. 2, pp. 129 – 150, 2011.
- [17] A. H. Sayed, *Fundamentals of adaptive filtering*. Hoboken, NJ : J. Wiley & Sons, 2003.