

Auto-localisation dans les réseaux de capteurs sans fil par régression de matrices de Gram

Paul HONEINE, Cédric RICHARD, Hichem SNOUSSI, Mehdi ESSOLOH

Laboratoire LM2S, Institut Charles Delaunay (FRE CNRS 2848)
Université de technologie de Troyes, 12 rue Marie Curie, 10010 Troyes
{paul.honeine,cedric.richard,hichem.snoussi}@utt.fr

Résumé – En l’absence d’information sur la position des nœuds d’un réseau de capteurs sans fil, au sein de l’environnement où ils sont déployés, les données récoltées peuvent s’avérer d’une utilité limitée. Le problème traité concerne l’auto-localisation de chacun de ces nœuds à partir de mesures de portée inter-capteurs telles que les RSSI, et de quelques capteurs dits ancres dont la position est connue. On exploite une technique de régression matricielle reposant sur le formalisme des espaces de Hilbert à noyau reproduisant et impliquant deux matrices de Gram, l’une partiellement connue correspondant aux positions relatives des capteurs, l’autre regroupant les mesures de portée inter-capteurs. On propose deux méthodes de résolution du problème, l’une en mode centralisée et l’autre distribuée. Le caractère non-paramétrique de l’approche proposée lui confère une flexibilité particulièrement appréciable dans le cadre des réseaux de capteurs, comme illustré par des expérimentations.

Abstract – In the lack of position information on the nodes in a wireless sensor network, within the environment where they are deployed, the collected data may become obsolete. In this paper, we address the problem of self-localization of each of these nodes from inter-sensor measurements such as RSSI, and a few sensors called anchors whose position is known. Within the framework of reproducing kernel Hilbert spaces, we operate a matrix regression technique on two Gram matrices, one corresponding to the partially known relative positions of the sensors, the other gathering RSSI measures between each sensor. Two methods are derived to solve the problem, a centralized algorithm and a distributed one. The non-parametric approach proposed here makes it a particularly flexible technique adapted to sensor networks, as shown with experiments.

1 Introduction

Les récentes avancées en micro-électronique et en communication numérique ont favorisé l’émergence des réseaux de capteurs, ouvrant la voie à de nouvelles applications dans des domaines tels que la sûreté, la surveillance et la sécurité. Chaque nœud du réseau est constitué d’un système miniaturisé, énergétiquement autonome, doté de capacités d’acquisition de données et de traitement. Une technologie sans fil leur permet de communiquer de proche en proche, sans hiérarchie centrale, de façon dynamique et instantanée, reconfigurable en fonction de l’évolution de la population de capteurs. Ce mode distribué présente l’avantage d’être particulièrement robuste aux attaques extérieures et à la défaillance de nœuds puisque’il est prévu que la perte de composants ne compromette pas l’efficacité du réseau dans son ensemble.

En l’absence d’information sur la position des éléments d’un réseau de capteurs sans fil, au sein de l’environnement où ils sont déployés, les données récoltées peuvent s’avérer d’une utilité limitée. Une étape préalable à tout traitement consiste donc à estimer la position de ces nœuds, à partir de mesures de portée inter-capteurs telles que les RSSI (Received Signal Strength Indication), et de la position supposée connue d’une fraction de capteurs appelés ancres. Ce problème d’auto-localisation a fait l’objet de nombreux travaux de recherche, les solutions

proposées variant selon le type de mesures de portée inter-capteurs considérées, la nature des hypothèses relatives à la propagation des signaux correspondants, etc. Ainsi des méthodes classiques d’estimation statistique [1] côtoient-elles des techniques d’analyse de données de type MDS [2, 3], ou encore de programmation semi-définie positive [4, 5]. Les méthodes non-paramétriques ont récemment fait l’objet d’une attention particulière, compte tenu de leur flexibilité particulièrement appréciable dans le cadre des réseaux de capteurs. Dans [6] par exemple, les auteurs proposent une technique de réduction de dimension basée sur l’apprentissage de la variété. L’auto-localisation est étudiée comme un problème de classification dans [7], les données relatives aux ancres constituant l’ensemble d’apprentissage.

Cet article propose une technique non-paramétrique pour l’auto-localisation dans les réseaux de capteurs sans fil. Il exploite une technique de régression matricielle récemment introduite dans le domaine de la bioinformatique [8]. Reposant sur le concept de noyau reproduisant, elle consiste en la détermination d’une fonction de régression liant deux matrices symétriques définies positives. La première matrice, totalement connue, rassemble ici les mesures de portée inter-capteurs. Afin de clarifier les propos, sans que cela nuise toutefois au caractère générique de l’approche, on supposera dans la suite qu’il s’agit de RSSI. La seconde matrice regroupe les produits scalaires des

vecteurs de coordonnées des capteurs, et n'est donc que partiellement connue au travers des couples ancre – ancre. La méthode proposée repose sur les données ancre – ancre de chaque matrice, que l'on utilise pour compléter les entrées ancre – capteur de la matrice des produits scalaires.

Cet article est organisé comme suit. La Section 2 décrit la méthode de régression matricielle pour résoudre le problème de localisation des nœuds dans les réseaux de capteurs, d'un point de vue centralisé. Une implémentation distribuée de l'algorithme est proposée à la Section 3. A la Section 4, des expérimentations illustrent la pertinence de ces approches.

2 Régression matricielle pour l'auto-localisation des nœuds

Considérons un réseau de N capteurs constitué de m ancres dont les positions sont connues, et de $N - m$ capteurs de coordonnées inconnues, avec $N \gg m$. On note \mathbf{x}_i le vecteur colonne des coordonnées du i -ème capteur, avec $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ lorsqu'il s'agit d'une ancre. Soit \mathbf{P} la matrice de Gram $[\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \dots \ \mathbf{x}_N]^\top [\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \dots \ \mathbf{x}_N]$ constituée à partir des coordonnées des capteurs. Celle-ci peut être décomposée en quatre sous-matrices \mathbf{P}_{aa} , \mathbf{P}_{ac} , \mathbf{P}_{ca} et \mathbf{P}_{cc} selon qu'elles impliquent les ancres (a) et/ou capteurs (c). Étant donnée la sous-matrice \mathbf{P}_{aa} , connue, on souhaite déterminer les autres sous-matrices. On dispose pour cela des mesures de RSSI pour chaque couple de capteurs, définissant ainsi la matrice \mathbf{K} . On décompose de même cette dernière en quatre sous-matrices \mathbf{K}_{aa} , \mathbf{K}_{ac} , \mathbf{K}_{ca} et \mathbf{K}_{cc} . A partir des deux sous-matrices \mathbf{P}_{aa} et \mathbf{K}_{aa} associées aux couples ancre – ancre, on cherche à déterminer une application associant les deux matrices \mathbf{P} et \mathbf{K} , comme illustré sur le schéma suivant.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{aa} & \mathbf{K}_{ac} \\ \mathbf{K}_{ca} & \mathbf{K}_{cc} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{aa} & \mathbf{P}_{ac} \\ \mathbf{P}_{ca} & \mathbf{P}_{cc} \end{bmatrix}$$

On exploite une technique de régression matricielle récemment introduite en reconnaissance des formes, dans le cadre des méthodes dites à noyau, pour la bioinformatique [8]. Celle-ci s'appuie sur le théorème de Moore-Aronszajn [9], que l'on rappelle ici. Étant donné une matrice symétrique définie positive \mathbf{K} , on peut exhiber un espace fonctionnel \mathcal{H} dit de Hilbert à noyau reproduisant, et un noyau $\kappa(\cdot, \cdot)$ correspondant à un produit scalaire dans \mathcal{H} . L'espace \mathcal{H} est engendré par les fonctions $\kappa(\mathbf{x}_i, \cdot)$, et complété de sorte que toute suite de Cauchy y converge. Le produit scalaire sur \mathcal{H} est défini par $\kappa(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \langle \kappa(\mathbf{x}_i, \cdot), \kappa(\mathbf{x}_j, \cdot) \rangle_{\mathcal{H}}$, où $\kappa(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$ est le (i, j) -ème élément de \mathbf{K} . Il convient de préciser que les mesures de RSSI ne conduisent pas nécessairement à une matrice \mathbf{K} qui soit symétrique définie positive. On lui appliquera au préalable

si besoin l'une des nombreuses transformations possibles afin de lui conférer cette propriété. Voir [10] par exemple.

On considère la sous-matrice \mathbf{K}_{aa} , elle-même définie positive si \mathbf{K} l'est. L'espace de Hilbert à noyau reproduisant qui lui est associé est donc engendré par les m fonctions noyau $\kappa(\mathbf{x}_1, \cdot), \kappa(\mathbf{x}_2, \cdot), \dots, \kappa(\mathbf{x}_m, \cdot)$. On propose d'extraire ℓ caractéristiques de cet espace, qui reflètent implicitement la topologie des nœuds du réseau. Il s'agit ici d'un ensemble de fonctions $\psi_1(\cdot), \psi_2(\cdot), \dots, \psi_\ell(\cdot)$ qui, du fait de leur appartenance à l'espace fonctionnel sus-mentionné, peuvent se décomposer ainsi :

$$\psi_k(\cdot) = \sum_{i=1}^m \alpha_{i,k} \kappa(\mathbf{x}_i, \cdot), \quad k = 1, 2, \dots, \ell.$$

Les $m \times \ell$ coefficients de pondération $\alpha_{i,k}$ seront déterminés dans la suite en optimisant un critère liant les matrices \mathbf{P}_{aa} et \mathbf{K}_{aa} , à définir également. On regroupe pour le moment, d'une part les coefficients $\alpha_{i,k}$ dans une matrice \mathbf{A} de taille $m \times \ell$, d'autre part les fonctions extraites $\psi_k(\cdot)$ évaluées en un \mathbf{x} dans un vecteur $\Psi_{\mathbf{x}} = [\psi_1(\mathbf{x}) \ \psi_2(\mathbf{x}) \ \dots \ \psi_\ell(\mathbf{x})]^\top$, de sorte que

$$\Psi_{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \boldsymbol{\kappa}_{\mathbf{x}},$$

avec $\boldsymbol{\kappa}_{\mathbf{x}} = [\kappa(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}) \ \kappa(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}) \ \dots \ \kappa(\mathbf{x}_m, \mathbf{x})]^\top$. Afin de déterminer \mathbf{A} , on propose le modèle

$$\Psi_{\mathbf{x}_i}^\top \Psi_{\mathbf{x}_j} = \mathbf{x}_i^\top \mathbf{x}_j + \epsilon_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, m, \quad (1)$$

où ϵ_{ij} intègre la présence de bruit et autres composantes non-définies par le modèle. La minimisation de la variance de ϵ conduit naturellement au problème d'optimisation suivant

$$\hat{\mathbf{A}} = \arg \min_{\mathbf{A}} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m (\mathbf{x}_i^\top \mathbf{x}_j - \boldsymbol{\kappa}_{\mathbf{x}_i}^\top \mathbf{A}^\top \mathbf{A} \boldsymbol{\kappa}_{\mathbf{x}_j})^2 + \lambda R(\mathbf{A}),$$

avec $\lambda R(\mathbf{A})$ un terme de pénalisation permettant de contrôler la régularité de la solution. Il peut être indiqué de privilégier les fonctions $\psi_k(\cdot)$ de faible norme, où

$$\|\psi_k\|_{\mathcal{H}}^2 = \sum_{i,j=1}^m \alpha_{i,k} \alpha_{j,k} \kappa(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j).$$

Ceci se traduit par un terme de pénalisation de la forme $\sum_{k=1}^{\ell} \|\psi_k\|_{\mathcal{H}}^2 = \text{tr}(\mathbf{A}^\top \mathbf{A} \mathbf{K}_{aa})$, où $\text{tr}(\cdot)$ désigne l'opérateur trace d'une matrice. Comme $\text{tr}(\cdot) \leq \|\cdot\|_F^2$, où $\|\cdot\|_F$ désigne la norme de Frobenius, on propose d'utiliser le terme de pénalisation

$$R(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}^\top \mathbf{A} \mathbf{K}_{aa}\|_F^2.$$

Sous forme matricielle, l'identité (1) peut se réécrire ainsi

$$\mathbf{P}_{aa} = \mathbf{K}_{aa} \mathbf{A}^\top \mathbf{A} \mathbf{K}_{aa} + \boldsymbol{\epsilon},$$

et le problème d'optimisation à résoudre devient

$$\hat{\mathbf{A}} = \arg \min_{\mathbf{A}} \|\mathbf{P}_{aa} - \mathbf{K}_{aa} \mathbf{A}^\top \mathbf{A} \mathbf{K}_{aa}\|_F^2 + \lambda \|\mathbf{A}^\top \mathbf{A} \mathbf{K}_{aa}\|_F^2.$$

En annulant la dérivée de la fonction coût par rapport à $\mathbf{A}^\top \mathbf{A}$ directement, plutôt que \mathbf{A} , on obtient $\hat{\mathbf{A}}^\top \hat{\mathbf{A}} = (\mathbf{K}_{aa}^\top \mathbf{K}_{aa} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{K}_{aa}^\top \mathbf{P}_{aa} \mathbf{K}_{aa}^{-1}$, ou encore

$$\hat{\mathbf{A}}^\top \hat{\mathbf{A}} = \mathbf{K}_{aa}^{-1} \mathbf{P}_{aa} \mathbf{K}_{aa} \left(\mathbf{K}_{aa}^\top \mathbf{K}_{aa} + \lambda \mathbf{I} \right)^{-1}. \quad (2)$$

Une fois la matrice $\widehat{\mathbf{A}}^\top \widehat{\mathbf{A}}$ déterminée, on peut alors utiliser cette application associant les deux matrices \mathbf{P} et \mathbf{K} pour déterminer les coordonnées inconnues. Nous sommes à présent en mesure de déterminer les positions des capteurs non-ancres, en procédant en deux étapes. A partir du modèle considéré, on note tout d'abord que

$$\widehat{\mathbf{P}}_{ac} = \mathbf{K}_{aa} \widehat{\mathbf{A}}^\top \widehat{\mathbf{A}} \mathbf{K}_{ac}, \quad (3)$$

où $\widehat{\mathbf{A}}^\top \widehat{\mathbf{A}}$ est donnée par l'expression (2). On remarque ensuite que $\mathbf{P}_{aa} = \mathbf{X}_a^\top \mathbf{X}_a$ est une matrice de rang 2, les capteurs étant dans un espace de dimension 2, ce qui permet de la décomposer sous la forme valeurs propres / vecteurs propres suivante

$$\widehat{\mathbf{P}}_{aa} = \mathbf{U}_2 \boldsymbol{\Lambda}_2 \mathbf{U}_2^\top,$$

les 2 valeurs propres non-nulles étant données par les éléments de la matrice diagonale $\boldsymbol{\Lambda}_2$, et les vecteurs propres correspondants constituant les colonnes de \mathbf{U}_2 . On peut alors écrire $\mathbf{X}_a^\top = \mathbf{U}_2 \boldsymbol{\Lambda}_2^{1/2}$ et, puisque $\mathbf{P}_{ac} = \mathbf{X}_a^\top \mathbf{X}_b$, on obtient

$$\widehat{\mathbf{X}}_b = \boldsymbol{\Lambda}_2^{-1/2} \mathbf{U}_2^\top \widehat{\mathbf{P}}_{ac}.$$

On précise que ces coordonnées sont obtenues dans le repère défini par les vecteurs propres, ce qui nécessite un post-traitement par transformation affine pour les aligner sur le repère des ancres.

3 Approche distribuée

Afin de répondre aux contraintes imposées par les réseaux de capteurs sans fil, on propose la mise en œuvre distribuée de notre approche. Il convient de noter que l'approche distribuée ne présente pas de difficulté majeure au regard des formes quadratiques manipulées. Pour cela, on remarque que le problème d'optimisation défini par (2)-(3) s'écrit sous la forme

$$\widehat{\mathbf{P}}_{ac} = \widehat{\mathbf{B}}^\top \mathbf{K}_{ac}, \text{ avec } \widehat{\mathbf{B}} = \mathbf{P}_{aa} \mathbf{K}_{aa} \left(\mathbf{K}_{aa}^\top \mathbf{K}_{aa} + \lambda \mathbf{I} \right)^{-1},$$

ou encore $\widehat{\mathbf{B}} = \widehat{\mathbf{A}}^\top \widehat{\mathbf{A}} \mathbf{K}_{aa}$.

Dans un cadre distribué, chaque capteur communique avec ses voisins pour déterminer ses propres coordonnées. On désigne par \mathcal{V}_i l'ensemble des indices¹ des ancres dans le voisinage du capteur i . On remarque que la i -ème colonne $\widehat{\mathbf{b}}_i$ de la matrice $\widehat{\mathbf{B}}$ correspond à l'ancre i . Pour une ancre i , soient $\mathbf{p}_{aa, \mathcal{V}_i}$ le vecteur ligne formé par les éléments de la i -ème ligne de \mathbf{P}_{aa} à partir des produits scalaires $\mathbf{x}_i^\top \mathbf{x}_j$ pour tout $j \in \mathcal{V}_i$, et $\mathbf{K}_{aa, \mathcal{V}_i}$ la sous-matrice de \mathbf{K}_{aa} d'éléments $\kappa(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_k)$ pour tout $j, k \in \mathcal{V}_i$. On écrit alors le problème d'optimisation défini sur le voisinage de l'ancre i par

$$\widehat{\mathbf{b}}_i = \arg \min_{\mathbf{b}_i} \|\mathbf{p}_{aa, \mathcal{V}_i}^\top - \mathbf{K}_{aa, \mathcal{V}_i} \mathbf{b}_i\|_F^2 + \lambda \|\mathbf{b}_i\|_F^2.$$

En annulant la dérivé de cette fonction coût par rapport \mathbf{b}_i , on obtient

$$\widehat{\mathbf{b}}_i = (\mathbf{K}_{aa, \mathcal{V}_i}^\top \mathbf{K}_{aa, \mathcal{V}_i} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{K}_{aa, \mathcal{V}_i}^\top \mathbf{p}_{aa, \mathcal{V}_i}.$$

1. Par convention, on suppose que pour une ancre i , l'indice i appartient à l'ensemble \mathcal{V}_i .

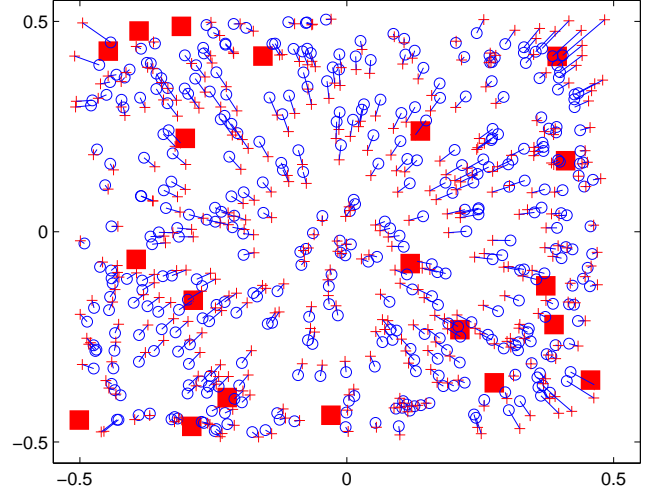


FIGURE 1 – Topologies reconstruites par l'algorithme centralisé. Les ancres sont représentées par des carrés rouges, les capteurs par des croix rouges, et leurs estimées par des cercles bleus. Les erreurs d'estimation sont données par les segments reliant les estimées aux nœuds correspondants.

La solution $\widehat{\mathbf{b}}_i$ est souvent calculée de manière efficace puisque le nombre total de voisins ancres est raisonnable dans un réseau de capteurs.

Conformément à la notation $\mathbf{p}_{aa, \mathcal{V}_i}$ présentée ci-dessus, on désigne par $\mathbf{p}_{ac, \mathcal{V}_i}$ le vecteur ligne composé par des éléments de la i -ème ligne de \mathbf{P}_{ac} à partir des produits scalaires $\mathbf{x}_i^\top \mathbf{x}_j$ pour tout $j \in \mathcal{V}_i$. On peut désormais estimer les éléments de $\mathbf{p}_{ac, \mathcal{V}_i}$ avec

$$\widehat{\mathbf{p}}_{ac, \mathcal{V}_i}(j) = \widehat{\mathbf{b}}_i^\top \boldsymbol{\kappa}_{\mathbf{x}_j, \mathcal{V}_i}$$

pour tout capteur non-ancre j dans le voisinage de l'ancre i . Le vecteur $\boldsymbol{\kappa}_{\mathbf{x}_j, \mathcal{V}_i}$ comprend les $\kappa(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_k)$ pour $k \in \mathcal{V}_i$, ou une limite inférieure si les capteurs j et k sont hors portée entre eux. Chaque capteur non-ancre j peut alors estimer ses coordonnées à partir des $\widehat{\mathbf{p}}_{ac, \mathcal{V}_i}(j)$ recueillis par les ancres dans son voisinage. Deux approches sont envisageables. Avec la première, on a recourt à une décomposition sous la forme valeurs propres / vecteurs propres, comme présenté précédemment. Avec la seconde approche, on est ramené à réécrire le problème d'estimation des coordonnées à partir des produits scalaires, avec

$$\widehat{\mathbf{x}}_j = \arg \min_{\mathbf{x}_j} \|\widehat{\mathbf{p}}_{ac, \mathcal{V}_j}^\top - \mathbf{X}_{a, \mathcal{V}_j} \mathbf{x}_j\|_F^2,$$

où $\mathbf{X}_{a, \mathcal{V}_j}$ désigne la matrice des coordonnées des ancres voisins du capteur j . Il est bien connu que la solution à ce problème est donnée par le pseudoinverse avec

$$\widehat{\mathbf{x}}_j = (\mathbf{X}_{a, \mathcal{V}_j}^\top \mathbf{X}_{a, \mathcal{V}_j})^{-1} \mathbf{X}_{a, \mathcal{V}_j}^\top \widehat{\mathbf{p}}_{ac, \mathcal{V}_j}.$$

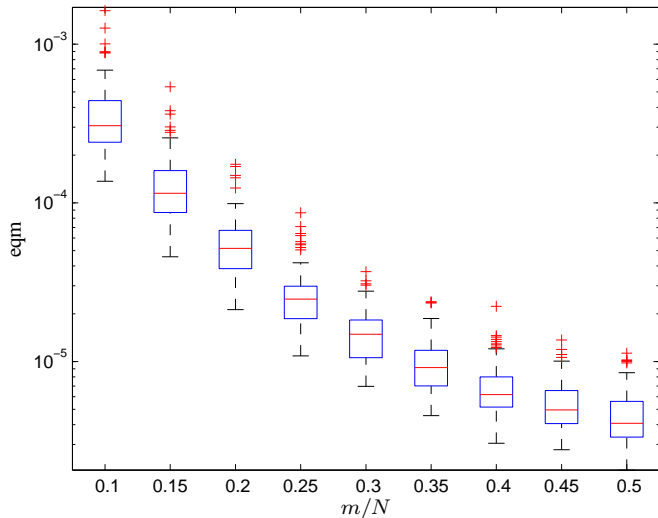


FIGURE 2 – Erreur quadratique moyenne sur l’estimation de position en fonction de la fraction d’ancres parmi les capteurs.

4 Applications

Afin d’illustrer l’intérêt de notre approche, on s’intéresse à une expérience semblable à [6]. L’atténuation des signaux y croît avec la distance inter-capteurs selon la loi $\kappa(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \exp(-\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|^2/2\sigma^2)$, où $\sigma = 0.75$ traduit la portée des capteurs. Dans notre étude, on considère un réseau de capteurs comprenant 420 nœuds uniformément distribués sur une région carrée de surface unité. Dans un premier temps, on étudie l’algorithme centralisé, avec 20 ancres. On représente à la Figure 1 les positions réelles et estimées pour chacun des capteurs, ainsi que l’erreur d’estimation. L’erreur quadratique moyenne sur l’estimation est de 0.0287. L’influence de la fraction d’ancres parmi les capteurs sur cette dernière est illustrée à la Figure 2, le nombre total des capteurs étant fixé à 420. La Figure 3 concerne la mise en œuvre de l’algorithme sous forme distribuée, appliqué au même réseau. Chaque capteur y estime sa position à partir des informations provenant des 5 ancres les plus proches. Dans le cas de l’implémentation distribuée, l’erreur quadratique moyenne est de 0.0326.

5 Conclusion

L’auto-localisation des nœuds est un problème crucial dans les réseaux de capteurs. Pour le résoudre, nous avons profité des développements récents des méthodes à noyau en reconnaissance des formes. La méthode de régression matricielle nous permet d’estimer les positions inconnues des capteurs, à partir des mesures de portée inter-capteurs et de la position connue d’une fraction de capteurs. Nous avons proposé de résoudre ce problème selon un mode centralisé dans un premier temps, avant d’aborder une implémentation distribuée mieux adaptée aux réseaux de capteurs sans fil.

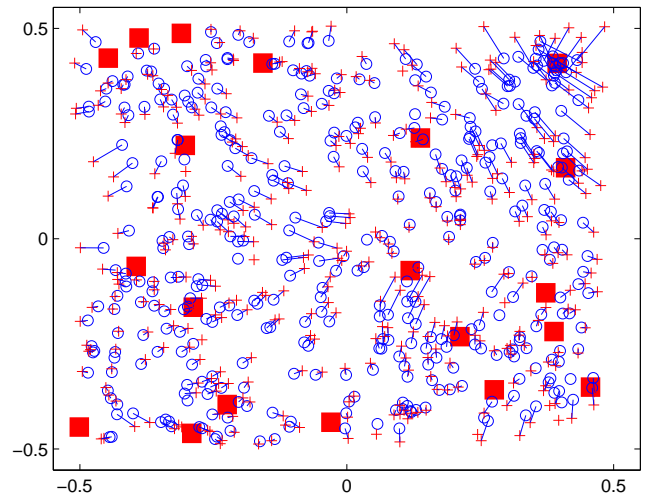


FIGURE 3 – Topologies reconstruites par l’algorithme distribué. Le réseau est similaire à celui de la Figure 1.

Références

- [1] N. Patwari, A. O. Hero, M. Perkins, N. Correal, and R. O’Dea, “Relative location estimation in wireless sensor networks,” *IEEE Trans. on Sig. Proc.*, vol. 51, no. 8, pp. 2137–2148, 2003.
- [2] J. A. Costa, N. Patwari, and A. O. Hero, “Distributed weighted-multidimensional scaling for node localization in sensor networks,” *ACM Trans. Sen. Netw.*, vol. 2, no. 1, pp. 39–64, 2006.
- [3] Y. Shang, W. Ruml, Y. Zhang, and M. Fromherz, “Localization from mere connectivity,” in *Proc. MobiHoc*, (Annapolis, USA), 2003.
- [4] J. Bachrach and C. Taylor, “Localization in sensor networks,” in *Handbook of Sensor Networks* (I. Stojmenovic, ed.), 2005.
- [5] L. Doherty, K. S. J. Pister, and L. E. Ghaoui, “Convex position estimation in wireless sensor networks,” in *Proc. IEEE Infocom*, (Anchorage, USA), 2001.
- [6] N. Patwari and A. O. Hero, “Manifold learning algorithms for localization in wireless sensor networks,” in *Proc. IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, (Montreal, Canada), 2004.
- [7] X. Nguyen, M. I. Jordan, and B. Sinopoli, “A kernel-based learning approach to ad hoc sensor network localization,” *ACM Trans. Sen. Netw.*, vol. 1, no. 1, pp. 134–152, 2005.
- [8] Y. Yamanishi and J. P. Vert, “Kernel matrix regression,” in *Proc. International Conference on Applied Stochastic Models and Data Analysis*, (Chania, Crete), 2007.
- [9] N. Aronszajn, “Theory of reproducing kernels,” *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 68, pp. 337–404, 1950.
- [10] A. Muñoz and I. de Diego, “From indefinite to positive semi-definite matrices,” in *Structural, Syntactic, and Statistical Pattern Recognition*, pp. 764–772, Springer-Verlag, 2006.