# Une nouvelle approche pour la construction de classes de représentations non-linéaires de signaux

Julien GOSME, Cédric RICHARD

Laboratoire de Modélisation et Sûreté des Systèmes, UTT
12, rue Marie Curie - B.P. 2060 - 10010 Troyes cedex - France
julien.gosme@utt.fr

**Résumé –** Dans cet article nous proposons d'étendre le champ des représentations covariantes en appliquant préalablement au signal une transformation non-linéaire. Pour ce faire, nous reprenons l'approche proposée par Hlawatsch pour la construction des représentations linéaires et bilinéaires covariantes avec des opérateurs de déplacement. Nous montrons alors comment faire usage des noyaux de Mercer dans ce contexte, après un bref rappel sur les espaces de Hilbert à noyau reproduisant.

**Abstract –** With this paper, we propose to extend covariant representations theory by a non linear pre-transform of the signal. This is done via Mercer kernels. We use Hlawatsch covariant time frequency analysis, to build linear and bilinear covariant representations. After a brief review of Mercer kernels, we propose to use them to construct new covariant representations.

## Introduction

Le choix d'une classe de représentations de signaux est conditionné par les propriétés que l'on souhaite exploiter, étant donné un problème d'analyse, d'estimation ou encore de détection. Nous considérons ici le cas où la covariance avec des opérateurs de translation est souhaitable. Outre les représentations linéaires et bilinéaires, la littérature traite aussi largement des représentations polynômiales et autres représentations d'ordre supérieur (par exemple [1]). Celles-ci reposent sur une transformation préalable du signal sur laquelle est appliquée une technique de représentation conventionnelle. Nous proposons d'obtenir de nouvelles représentations en appliquant préalablement une transformation non-linéaire au signal. Pour ce faire, nous faisons appel aux noyaux de Mercer qui permettent de calculer ces représentations sans avoir à appliquer explicitement aux signaux la transformation retenue.

Dans un premier temps, nous rappelons l'approche proposée par Hlawatsch dans [2] pour l'obtention de représentations linéaires et bilinéaires covariantes avec un opérateur de déplacement donné. Cet opérateur généralise les opérateurs de translation temps-fréquence et dilatation. Nous esquissons les liens entre cette technique [2] et les techniques employées par Cohen [3, 4], Baraniuk [5, 6], Jones et Sayeed [7] pour l'obtention de représentations. Pour plus de précision à ce sujet, le lecteur se reportera à [6, 8, 9, 10]. Dans un second temps, nous proposons de transformer préalablement les signaux afin d'obtenir de nouvelles classes de représentations non-linéaires. Nous rappelons des propriétés des espaces de Hilbert à noyau reproduisant, qui permettent de réaliser ces transformations de façon élégante et efficace en terme de temps de calcul. Nous formulons alors les représentations considérées en faisant apparaître des noyaux de Mercer, ce qui permet d'envisager un grand nombre de représentations et de non-linéarités, pour une complexité indépendante du choix de l'espace dans lequel les signaux sont transformés.

## 1 Représentations linéaires et bilinéaires covariantes

La méthode de Hlawatsch [2] vise à obtenir des représentations covariantes avec certaines transformations qui peuvent être appliquées au signal. Par exemple, on peut citer les opérateurs de translation temporelle et fréquentielle, notés $\mathbf{T}_\tau$ et $\mathbf{F}_\xi$, définis par:

$$(\mathbf{T}_\tau x)(t) = x(t-\tau) \text{ et } (\mathbf{F}_\xi x)(t) = e^{i2\pi\xi t}x(t). \qquad (1)$$

Ces deux opérateurs sont différents des opérateurs hermitiens de temporel et fréquentiel utilisés par Cohen pour la construction de représentations conjointes [3, 4]. Il y a cependant une équivalence entre cette dernière approche et celle de Hlawatsch, comme expliqué dans [10].

### 1.1 Opérateurs de warping et de modulation

De manière à généraliser le couple des translations temps et fréquence, Hlawatsch propose une définition des opérateurs de modulation. Ceux-ci généralisent l'opérateur de translation en fréquence. En effet nous avons [2]:

**Proposition 1.1** *Soit un ensemble $\Omega \subseteq \mathbb{R}$, deux groupes $(\mathcal{G},\star)$ et $(\mathcal{H},\diamond)$ liés à $(\mathbb{R},+)$ par les isomorphismes $\Phi_\mathcal{H}$ et $\Phi_\mathcal{G}$ et une fonction $m(t)$ inversible de $\Omega$ dans $m(\Omega) \subseteq \mathcal{G}$. Posons $\tilde{m}(t) = \Phi_\mathcal{G}(m(t))$. La famille d'opérateurs linéaires $\{\boldsymbol{M}_h\}_{h\in(\mathcal{H},\diamond)}$ définie sur $L^2(\Omega)$ par:*

$$(\boldsymbol{M}_h x)(t) = e^{2i\pi\phi_\mathcal{H}(h)\tilde{m}(t)}x(t) \qquad (2)$$

*est appelée famille d'opérateurs de modulation. La fonction $m(t)$ est appelée fonction de modulation.*

De façon symétrique on peut généraliser l'opérateur de translation temporelle via les opérateurs de warping [2].

**Proposition 1.2** *Soit un ensemble $\Theta \subseteq \mathbb{R}$, un groupe $(\mathcal{G},\star)$ lié à $(\mathbb{R},+)$ par l'isomorphisme $\Phi_\mathcal{G}$. Posons $w_g(t)$ avec $g \in$*

$(\mathcal{G},\star)$ *et* $t \in \Theta$ *une fonction indexée avec les propriétés suivantes:*

- *Pour un* $g \in (\mathcal{G},\star)$ *fixé,* $w_g(t)$ *est une fonction inversible, continûment differentiable qui va de* $\Theta$ *dans* $\Theta$ *dont la dérivé est non-nulle (c'est-à-dire un difféomorphisme)et qui possède la propriété de composition suivante*

$$w_{g1}(w_{g2}(t)) = w_{g1\star g2}(t). \tag{3}$$

- *Pour un* $t$ *fixé, le mapping* $g \to w_g(t)$ *est continu.*

*Alors la famille d'opérateurs linéaires* $\{\boldsymbol{W}_g\}_{g\in(\mathcal{G},\star)}$ *définie sur* $L^2(\Theta)$ *par*

$$(\boldsymbol{W}_g x)(t) = \sqrt{|w_g'(t)|}x(w_g(t)),\ g \in (\mathcal{G},\star),\ t \in \Theta \tag{4}$$

*est appelée famille d'opérateurs de warping. La fonction* $w_g(t)$ *est appelée fonction de warping.*

Notons que les opérateurs de modulation et de warping sont unitairement équivalents (aux changements de variable $\xi = \Phi_{\mathcal{H}}(h)$ et $\tau = \Phi_{\mathcal{G}}(g)$ près) aux opérateurs de translation fréquentielle et temporelle $\mathbf{F}_\xi$ et $\mathbf{T}_\tau$,

$$\mathbf{M}_h = \mathbf{U}\mathbf{F}_{\Phi_{\mathcal{H}}(h)}\mathbf{U}^{-1} \text{ et } \boldsymbol{W}_g = \mathbf{U}\mathbf{T}_{\Phi_{\mathcal{G}}(g)}\mathbf{U}^{-1}, \tag{5}$$

avec $\mathbf{U}\ : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}),\ (\mathbf{U}x)(t) = \sqrt{|\tilde{m}'(t)|}x(\tilde{m}(t))$.

## 1.2 Relations entre opérateurs : dualité et affinité

Ces opérateurs de modulation et de warping généralisent les opérateurs de translation en temps, en fréquence et de dilatation. Des relations différentes existent entre les opérateurs de translation temps fréquence et les opérateurs de translation temps échelle. Hlawatsch généralise ces relations par la dualité (qui généralise le couple temps-fréquence $\mathbf{F}_\xi\mathbf{T}_\tau$) et l'affinité (qui généralise le couple temps-échelle $\mathbf{T}_\tau\mathbf{C}_\sigma$) [2].

**Définition 1** *Soient* $(\mathcal{G},\star)$ *et* $(\mathcal{H},\diamond)$ *deux groupes isomorphes à* $(\mathbb{R},+)$ *via les isomorphismes* $\Phi_{\mathcal{G}}$ *et* $\Phi_{\mathcal{H}}$*. Considérons deux représentations unitaires* $\{\boldsymbol{G}_g\}_{g\in\mathcal{G}}$ *et* $\{\boldsymbol{H}_h\}_{h\in\mathcal{H}}$ *des groupes* $(\mathcal{G},\star)$ *et* $(\mathcal{H},\diamond)$ *sur un espace de Hilbert invariant et minimal* $\chi$ *(c'est-à-dire que* $\chi$ *est le plus petit espace non vide invariant simultanément avec* $\mathcal{G}_g$ *et* $\mathcal{H}_h$*). Alors,* $\{\boldsymbol{H}_h\}_{h\in\mathcal{H}}$ *est appelé dual de* $\{\boldsymbol{G}_g\}_{g\in\mathcal{G}}$ *si*

$$\boldsymbol{H}_h\boldsymbol{G}_g = e^{i2\pi\Phi_{\mathcal{G}}(g)\Phi_{\mathcal{H}}(h)}\boldsymbol{G}_g\boldsymbol{H}_h, \tag{6}$$

*pour tout* $g \in (\mathcal{G},\star)$, $h \in (\mathcal{H},\diamond)$.

Dans la définition précédente, nous avons généralisé la relation qui existe entre les opérateurs translation en temps et en fréquence. Nous généralisons maintenant celle qui existe entre l'opérateur translation en temps et l'opérateur de dilatation [2].

**Définition 2** *Soient* $(\mathcal{G},\star)$ *et* $(\mathcal{H},\diamond)$ *deux groupes isomorphes à* $(\mathbb{R},+)$ *via les isomorphismes* $\Phi_{\mathcal{G}}$ *et* $\Phi_{\mathcal{H}}$*. Considérons deux représentations unitaires* $\{\boldsymbol{G}_g\}_{g\in\mathcal{G}}$ *et* $\{\boldsymbol{H}_h\}_{h\in\mathcal{H}}$ *des groupes* $(\mathcal{G},\star)$ *et* $(\mathcal{H},\diamond)$ *sur un espace de Hilbert invariant et minimal* $\chi$*. Alors,* $\{\boldsymbol{H}_h\}_{h\in\mathcal{H}}$ *est appelé affine de* $\{\boldsymbol{G}_g\}_{g\in\mathcal{G}}$ *si*

$$\boldsymbol{H}_{\nu(h,g)}\boldsymbol{G}_g = \boldsymbol{G}_g\boldsymbol{H}_h, \tag{7}$$

*avec* $\nu(g,h) = \Phi_{\mathcal{H}}^{-1}(\Phi_{\mathcal{H}}(h)e^{(\Phi_{\mathcal{G}}(g))})$*, pour tout* $g \in (\mathcal{G},\star)$, $h \in (\mathcal{H},\diamond)$.

Nous avons noté, dans (5), que les opérateurs de warping sont unitairement équivalents à l'opérateur de déplacement temporel $\mathbf{T}_\tau$ et que les opérateurs de modulation sont unitairement équivalents à l'opérateur de déplacement fréquentiel $\mathbf{F}_\xi$. Deux opérateurs de warping et de modulations $\mathbf{G}_g$ et $\mathbf{H}_h$ sont donc duaux si,

$$\mathbf{G}_g = \mathbf{U}\mathbf{T}_{\Phi_{\mathcal{G}}(g)}\mathbf{U}^{-1} \text{ et } \mathbf{H}_h = \mathbf{U}\mathbf{F}_{\Phi_{\mathcal{H}}(h)}\mathbf{U}^{-1}, \tag{8}$$

et deux opérateurs $\mathbf{G}_g$ et $\mathbf{H}_h$ sont affines si

$$\mathbf{G}_g = \mathbf{V}\mathbf{C}_{\exp(\Phi_{\mathcal{G}}(g))}\mathbf{V}^{-1} \text{ et } \mathbf{H}_h = \mathbf{V}\mathbf{T}_{\pm\Phi_{\mathcal{H}}(h)}\mathbf{V}^{-1}, \tag{9}$$

avec $\mathbf{U}$ et $\mathbf{V}$ deux opérateurs isométriques.

En combinant ces opérateurs, on obtient des opérateurs de déplacement, notés $\mathbf{D}_\theta = \mathbf{A}_\alpha\mathbf{B}_\beta$, décrivant les déplacements de la représentation dans le plan $\alpha, \beta$. Ces opérateurs de déplacement sont en fait des versions unitairement transformées des couple temps-fréquence et temps-échelle. Ainsi, construire deux opérateurs duaux ou affine est équivalent à appliquer une transformation unitaire aux couples $\mathbf{F}_\xi\mathbf{T}_\tau$ et $\mathbf{T}_\tau\mathbf{C}_\sigma$. La méthode de Hlawatsch rejoint ainsi la méthode de Baraniuk et Jones consistant à utiliser des représentations temps-fréquence ou temps-échelle sur lesquelles on applique un warping unitaire [2, 6, 8, 9].

## 1.3 $\theta$-Représentations covariantes

Après avoir longuement caractérisé les opérateurs de modulation, de warping et de déplacement, nous allons construire des représentations du signal qui sont covariantes avec les opérateurs de déplacement de paramètre $\theta$ [2].

**Définition 3** *Soit* $\{\boldsymbol{D}_\theta\}_{\theta\in(\mathcal{D},\star)}$ *un opérateur de déplacement de cocycle* $c$*, défini sur un espace de Hilbert* $\chi$*. Une* $\theta$*-représentation* $L_x(\theta)$ *est dite covariante avec l'opérateur de déplacement* $\boldsymbol{D}_\theta$ *si pour tout* $x \in \chi$

$$L_{\boldsymbol{D}_{\theta_1}x}(\theta) = c(\theta\star\theta_1^{-1},\theta_1)L_x(\theta\star\theta_1^{-1}), \tag{10}$$

*pour tout* $\theta, \theta_1 \in \mathcal{D}$.

La représentation du signal reflète donc le déplacement appliqué au signal. En d'autres termes, l'opération de déplacement et l'opération consistant à calculer la représentations commutent (à un facteur de phase près). Le facteur de phase $c$ est le cocycle de l'opérateur de déplacement. Ainsi, pour des opérateurs duaux, le cocyle vient du terme exponentiel dans l'équation (6). Comme le montre l'équation (7), pour des opérateurs affines, le cocycle est égal à 1. Pour plus de détails sur le cocycle, on pourra se référer à [2]. Nous pouvons construire des représentations covariantes en utilisant les théorèmes suivants [2].

**Théorème 1** *Toutes les* $\theta$*-représentations linéaires covariantes avec l'opérateur de déplacement* $\{\boldsymbol{D}_\theta\}_{\theta\in(\mathcal{D},\star)}$ *dans un espace de Hilbert* $\chi$ *sont données par*

$$L_x(\theta) = \ < x, \boldsymbol{D}_\theta h > \ = \int_t x(t)(\boldsymbol{D}_\theta h)^*(t)dt,\ \theta \in \mathcal{D}, \tag{11}$$

*où* $h$ *est une fonction arbitraire de* $\chi$.

De même, pour les représentations bilinéaires [2]

**Théorème 2** *Toutes les $\theta$-représentations bilinéaires covariantes avec l'opérateur de déplacement $\{\boldsymbol{D}_\theta\}_{\theta\in(\mathcal{D},\star)}$ dans un espace de Hilbert $\chi$ sont données par:*

$$B_{x,y}(\theta) = < x, \boldsymbol{D}_\theta \boldsymbol{K} \boldsymbol{D}_\theta^{-1} y > \qquad (12)$$

$$\int_{t_1}\int_{t_2} x(t_1)y^*(t_2)[\boldsymbol{D}_\theta \boldsymbol{K} \boldsymbol{D}_\theta^{-1}]^*(t_1,t_2)\,dt_1\,dt_2,\ \theta\in\mathcal{D}, \qquad (13)$$

*où $[\boldsymbol{D}_\theta \boldsymbol{K} \boldsymbol{D}_\theta^{-1}]^*(t_1,t_2)$ représente le noyau de $\boldsymbol{D}_\theta \boldsymbol{K} \boldsymbol{D}_\theta^{-1}$ avec $\boldsymbol{K}$ un opérateur linéaire arbitraire sur $\chi$.*

## 2 Les noyaux de Mercer $\kappa$

Afin de proposer un formalisme unifié qui comprend les classes de représentations classiques telles que les classes affine et de Cohen ainsi que leurs extensions non-linéaires, sans pour autant engendrer de lourds calculs, nous suggérons de faire appel à la théorie des noyaux de Mercer. Nous allons à présent détailler en quoi ces noyaux offrent un formalisme élégant pour parvenir à ces fins [11, 12].

Soit $\mathcal{H}$ un espace fonctionnel hilbertien, composé de fonctions $\psi$ continues sur un espace signal $\mathcal{X}$, et de produit scalaire $<\cdot,\cdot>_\mathcal{H}$. D'après le théorème de représentation de Riesz, il existe une fonction unique $\kappa(x,y)$ de la variable $x$, étant donné $y$ fixé, telle que

$$\psi(y) = <\psi, \kappa(\cdot,y)>_\mathcal{H}, \qquad \forall\psi\in\mathcal{H}. \qquad (14)$$

Dans cette expression, $\kappa(\cdot,y)$ désigne une fonction définie sur $\mathcal{X}$, obtenue en fixant le second argument de $\kappa$ à $y$. Il en résulte que l'ensemble $\{\kappa(\cdot,x) : x\in\mathcal{X}\}$ engendre $\mathcal{H}$, et que le produit scalaire $<\cdot,\cdot>_\mathcal{H}$ ne nécessite d'être défini que sur cet ensemble de générateurs. Au vu de cette propriété, $\kappa$ est appelé *noyau reproduisant* de $\mathcal{H}$. En notant $\Psi(x)$ la fonction $\kappa(\cdot,x)$, l'équation (14) implique

$$<\Psi(x),\Psi(y)>_\mathcal{H} = \kappa(y,x), \qquad (15)$$

pour tout $x$, $y\in\mathcal{X}$. Ce résultat signifie que $\kappa(x,y)$ fournit le produit scalaire des images dans $\mathcal{H}$ de toute paire d'éléments de l'ensemble $\mathcal{X}$. En autorisant l'exploitation de ce concept sans nécessairement connaître explicitement $\mathcal{H}$ et $\Psi$, la condition de Mercer a contribué aux plus récents développements des structures à noyau en reconnaissance des formes [13]. En effet, cette condition implique que si une application $\kappa(x,y)$ est définie positive, alors c'est un noyau reproduisant associé à un produit scalaire dans un espace de Hilbert [11].

Nous allons nous intéresser à quelques exemples de noyaux utilisables. Le noyau polynômial, de forme $\kappa_\mathcal{P}^d(x,y) = (r+ < x,y >)^d$, où $< x,y >$ désigne le produit scalaire canonique de $x$ et $y$, est largement utilisé dans les méthodes à noyaux. Également très utilisés, les noyaux exponentiels radiaux ne font pas intervenir directement le produit scalaire des observations $x$ et $y$ mais, parce qu'ils remplissent les conditions de Mercer, correspondent à un produit scalaire dans un espace transformé. Les deux principaux sont le noyau gaussien radial, $\kappa_\mathcal{G}^\sigma(x,y) = \exp(\frac{-|x-y|^2}{\sigma})$, et le noyau exponentiel, $\kappa_\mathcal{E}^\sigma(x,y) = \exp(\frac{-|x-y|}{\sigma})$. Des noyaux qui viennent d'être présentés se dégagent deux familles plus générales: les noyaux projectifs, qui font intervenir le produit scalaire $< x,y >$ et les noyaux radiaux qui reposent sur la norme $|x-y|$.

Le choix de noyaux ne se limite cependant pas à ceux-ci. En effet, il est possible de construire des noyaux pour des applications particulières. La seule condition étant la positivité de la fonction, un polynôme à coefficients positifs de noyaux ou bien l'exponentielle d'un noyau sont des noyaux valides. Genton étudie une grande variété d'exemples et de techniques de construction de noyaux dans [14].

## 3 $\theta$-Représentations à noyaux

Le travail proposé ici consiste à utiliser les noyaux reproduisants pour généraliser les représentations covariantes présentées plus haut. La combinaison des éléments précédents nous permet donc d'étendre l'ensemble de représentations covariantes avec un opérateur de déplacement de façon très significative. On propose ainsi les définitions suivantes.

**Définition 4** *Soit $\boldsymbol{D}_\theta$, $\theta\in(\mathcal{D},\star)$ un opérateur de déplacement dans un espace de Hilbert $\mathcal{X}$. Soit $\kappa$ un noyau de Mercer. Les représentations données par l'expression*

$$KL_x(\theta) = \kappa(x, \boldsymbol{D}_\theta h),\ \theta\in\mathcal{D}, \qquad (16)$$

*où $h$ est une fonction arbitraire de $\mathcal{X}$, sont appelées représentations linéaires à noyau $\kappa$.*
*De façon analogue, les représentations définies par*

$$KB_{x,y}(\theta) = \kappa(x, \boldsymbol{D}_\theta \boldsymbol{K} \boldsymbol{D}_\theta^\dagger y),\ \theta\in\mathcal{D}, \qquad (17)$$

*où $\boldsymbol{K}$ est un opérateur linéaire arbitraire sur $\mathcal{X}$ sont appelées représentations bilinéaires à noyau $\kappa$. Dans cette expression, l'opérateur $\boldsymbol{D}_\theta^\dagger$ désigne l'adjoint de $\boldsymbol{D}_\theta$ vis-à-vis de $\kappa(x,y)$, soit $\kappa(\boldsymbol{D}_\theta x, y) = \kappa(x, \boldsymbol{D}_\theta^\dagger y)$.*

On peut à présent légitimement s'interroger sur la covariance de ces représentations au même titre que les représentations originales. Les théorèmes suivants, dont une démonstration va être proposée, apportent une réponse à ces questions.

**Théorème 3** *Soit $\{\boldsymbol{D}_\theta\}_{\theta\in(\mathcal{D},\star)}$ un opérateur de déplacement dans un espace de Hilbert $\chi$. Soit $\kappa$ un noyau positif. Les $\theta$-représentations linéaires à noyaux $\kappa$*

$$KL_{x,h}(\theta) = \kappa(x, \boldsymbol{D}_\theta h),\ \theta\in\mathcal{D}, \qquad (18)$$

*où $h$ est une fonction arbitraire de $\chi$, sont covariantes avec l'opérateur de déplacement $\boldsymbol{D}_\theta$ si son adjoint $\boldsymbol{D}_\theta^\dagger$ est tel que $\boldsymbol{D}_{\theta_1}^\dagger \boldsymbol{D}_{\theta_0} = \boldsymbol{D}_{\theta_0\star\theta_1^{-1}}$.*

**Preuve :** A partir de (18), on a directement

$$KL_{\mathbf{D}_{\theta_1}x,h}(\theta) = \kappa(\mathbf{D}_{\theta_1}x, \mathbf{D}_\theta h) = \kappa(x, \mathbf{D}_{\theta_1}^\dagger \mathbf{D}_\theta h),$$

soit encore

$$KL_{\mathbf{D}_{\theta_1}x,h}(\theta) = \kappa(x, \mathbf{D}_{\theta\star\theta_1^{-1}}h) = KL_{x,h}(\theta\star\theta_1^{-1}).$$

**Théorème 4** *Soit $\{\boldsymbol{D}_\theta\}_{\theta\in(\mathcal{D},\star)}$ un opérateur de déplacement dans un espace de Hilbert $\chi$. Soit $\kappa$ un noyau positif. Les $\theta$-représentations bilinéaires à noyaux $\kappa$*

$$KB_{x,y}(\theta) = \kappa(x, \boldsymbol{D}_\theta \boldsymbol{K} \boldsymbol{D}_\theta^\dagger y),\ \theta\in\mathcal{D}, \qquad (19)$$

*où $\boldsymbol{K}$ est un opérateur linéaire arbitraire sur $\chi$, sont covariantes avec l'opérateur de déplacement $\boldsymbol{D}_\theta$ si son adjoint vis-à-vis de $\kappa$ est tel que*

$$\boldsymbol{D}_{\theta_1}^\dagger \boldsymbol{D}_{\theta_0} = c\boldsymbol{D}_{\theta_0\star\theta_1^{-1}},\ \boldsymbol{D}_{\theta_0}^\dagger \boldsymbol{D}_{\theta_1} = \left(\boldsymbol{D}_{\theta_1}^\dagger \boldsymbol{D}_{\theta_0}\right)^\dagger = c^\dagger \boldsymbol{D}_{\theta_0\star\theta_1^{-1}}^\dagger$$

*où le terme $c$ est un terme scalaire tel que $c^\dagger c = 1$.*

**Preuve :** A partir de (19), on a directement

$$\begin{aligned}
KB_{\mathbf{D}_{\theta_1}x,\mathbf{D}_{\theta_1}y}(\theta) &= \kappa(\mathbf{D}_{\theta_1}x, \mathbf{D}_\theta \mathbf{K}\mathbf{D}_\theta^\dagger \mathbf{D}_{\theta_1}y) \\
&= \kappa(x, \mathbf{D}_{\theta_1}^\dagger \mathbf{D}_\theta \mathbf{K}\mathbf{D}_\theta^\dagger \mathbf{D}_{\theta_1}y) \\
&= \kappa(x, \mathbf{D}_{\theta_1}^\dagger \mathbf{D}_\theta \mathbf{K}\left(\mathbf{D}_{\theta_1}^\dagger \mathbf{D}_\theta\right)^\dagger y) \\
&= \kappa(x, \mathbf{D}_{\theta\star\theta_1^{-1}} \mathbf{K}\mathbf{D}_{\theta\star\theta_1^{-1}}^\dagger y),
\end{aligned}$$

ce qui implique donc que

$$KB_{\mathbf{D}_{\theta_1}x,\mathbf{D}_{\theta_1}y}(\theta) = KB_{x,y}(\theta\star\theta_1^{-1}).$$

Ainsi la propriété centrale des représentations étudiées ici, c'est-à-dire la covariance avec un opérateur de déplacement, est généralement préservée par l'extension non linéaire obtenue grâce aux noyaux de Mercer. En effet, pour tous les noyaux projectifs ou radiaux, l'adjoint d'un opérateur de déplacement $\{\mathbf{D}_{\theta_1}\}$ n'est autre que le déplacement $\{\mathbf{D}_{\theta_1^{-1}}\}$. Ainsi pour les déplacement affines, les conditions des deux théorèmes sont vérifiées. Pour les déplacements basés sur des opérateurs duaux, il y a apparition d'un terme de phase, le cocyle $c$, qui contredit les conditions du premier théorème. Les conditions du second sont, elles, vérifiées. Ainsi pour des opérateurs duaux et des représentations linéaires à noyaux radiaux ou projectifs, la préservation de la covariance dépendra du noyau considéré.

# Conclusion

Cet article a proposé une approche visant à étendre le champ des représentations d'un signal. Cette extension est significative car la classe des noyaux satisfaisant la condition de Mercer est vaste. Nous avons alors démontré les conditions pour que ces classes de représentations restent covariantes. De plus, il est à noter que l'usage de noyaux convenablement choisis permet, dans certains cas, d'obtenir des propriétés additionnelles. Par exemple, si pour l'application souhaitée, on désire que la représentation soit réelle ou bien positive, le choix d'un noyau reproduisant à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^+$ ne pose pas de difficultés. Tel est le cas des noyaux gaussiens, qui sont à valeurs dans $[0, 1]$. Il est aussi possible d'obtenir des représentations fortement concentrées. Ainsi la concentration d'une représentation basée sur un noyau polynomial augmente avec le degrés du noyau. Notons à ce sujet que les représentations temps-fréquence reposant sur un noyau polynômial sont à mettre en relation avec les représentations de Wigner polynômiales proposées par Stanković [1]. Plus généralement, comme cette construction est basée sur des opérateurs de déplacements, elle étend les représentations de la classe de Cohen, mais aussi les représentations affine, hyperboliques, ou encore les transformées en ondelettes.

Enfin, il convient de remarquer que l'approche proposée ne requiert pas de connaissance explicite de la fonction non linéaire $\Psi$ préalablement appliquée aux signaux, ce qui n'entraîne pas de calculs importants.

# Références


[1] L. Stanković, "L-class of time-frequency distributions," *IEEE Signal Processing letters*, vol. 3, no. 1, pp. 22–25, 1996.

[2] F. Hlawatsch, G. Taubock, and T. Twaroch, *Wavelets and Signal Processing*, chapter Covariant Time-Frequency Analysis, Birkhauser, Boston (MA), 2002.

[3] L. Cohen, *Time-frequency analysis*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1995.

[4] L. Cohen, "A general approach for obtaining joint representations in signal analysis - part i: Characteristic function operator method," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 44, pp. 1080–1090, 1996.

[5] R. G. Baraniuk and D. L. Jones, "Unitariy equivalence: A new twist on signal processing," *IEEE transactions on signal processing*, vol. 43, no. 11, pp. 2269–2282, 1995.

[6] R. G. Baraniuk, "Covariant time-frequency representations through unitary equivalence," *IEEE signal processing letters*, vol. 3, pp. 79–81, 1996.

[7] A. M. Sayeed and D. L. Jones, "Integral transforms covariant to unitary operators and their applications for joint signal representations," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 44, pp. 1395–1377, 1996.

[8] R. G. Baraniuk, "Marginals vs. covariance in joint distribution theory," *IEEE ICASSP-95 (Detroit-MI)*, pp. 1021–1024, 1995.

[9] A. M. Sayeed and D. L. Jones, "Equivalence of generalized joint signal representations of arbitrary variables," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 44, pp. 2959–2970, 1996.

[10] A. M. Sayeed, "On the equivalence of the operator and kernel method for joint distributions of arbitrary variables," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 45, pp. 1067–1069, 1997.

[11] J. Mercer, "Functions of positive and negative type and their connection with the theory of integral equations," *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A*, vol. 209, pp. 415–446, 1909.

[12] N. Aronszajn, "Theory of reproducing kernels," *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 68, pp. 337–404, 1950.

[13] V.N. Vapnik, *The Nature of Statistical Learning Theory*, Springer, 1995.

[14] M. Genton, "Classes of kernels for machine learning: A statistics perspective," *Journal of Machine Learning Research*, pp. 299–312, 2001.