

# Sur la caractérisation de non-stationnarités par la méthode des substituts

Hassan AMOUD<sup>1</sup>, Cédric RICHARD<sup>1</sup>, Paul HONEINE<sup>1</sup>, Patrick FLANDRIN<sup>2</sup>, Pierre BORGNAT<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Institut Charles Delaunay (FRE 2848 CNRS)  
Université de Technologie de Troyes, 12 rue Marie Curie, 10010 Troyes, France

<sup>2</sup>Laboratoire de Physique (UMR 5672 CNRS)  
École Normale Supérieure de Lyon, 46 allée d'Italie, 69364 Lyon, France  
prénom.nom@{utt,ens-lyon}.fr

**Résumé** – La méthode des substituts consiste à générer des références stationnarisées d'un signal qui permettent, le cas échéant, de rejeter l'hypothèse nulle de stationnarité au terme d'un test statistique. On étudie dans quelle mesure cette approche permet de caractériser le type de non-stationnarité dont le signal testé ferait l'objet. Au-delà de l'approche générale elle-même, on s'intéresse à une classe de signaux mêlant modulations d'amplitude et de fréquence à des degrés respectifs choisis, et conduisant tous aux mêmes substituts. Ce socle commun offre le cadre nécessaire à la caractérisation de différentes formes de non-stationnarité. Les tests effectués montrent le potentiel de la méthode des substituts dans la caractérisation des formes de non-stationnarité, au-delà de son rôle originel dans l'élaboration de tests de stationnarité.

**Abstract** – The surrogate data technique generates a family of stationarized surrogate signals from the signal under investigation, enabling to derive a statistical test to reject or accept the null hypothesis of stationarity. In this paper, we examine how and to what extent this approach also allows us to characterize the type of non-stationarity of the signal under investigation. Beyond this general approach, we are interested in a class of signals modulated jointly in amplitude and frequency, all leading to the same surrogates. This approach provides the necessary framework for characterizing different forms of non-stationarity. Experimental results demonstrate the potential of the surrogate data technique to characterize different forms of non-stationarity, beyond its original role of deriving stationarity tests.

## 1 Motivation

Le concept de stationnarité est omniprésent en traitement du signal, car en accepter l'hypothèse représente un prérequis au bon usage de méthodes standard dévolues à l'étude de phénomènes en régime établi, ou car s'en écarter peut constituer en soi une information importante dans un environnement évolutif. La notion de stationnarité est parfaitement définie comme une invariance statistique des variables d'intérêt par rapport à toute translation temporelle. Elle est souvent assortie de considérations pratiques ayant le mérite d'en étendre la portée à des réalisations simples à horizon fini, éventuellement ponctuées de changements brusques et selon une échelle d'observation. Ainsi donne-t-on une dimension relative à ce concept, par rapport à une référence traduisant la notion de permanence dans le cadre expérimental défini par le praticien.

Abordant la notion de stationnarité dans une telle perspective relative, deux des auteurs ont initialement pris le parti de développer une méthode de simulation générant des références stationnarisées du signal étudié. Ces substituts permettent, le cas échéant, de rejeter l'hypothèse

de stationnarité au terme d'un test statistique, de type paramétrique [1] ou non-paramétrique [2], offrant aussi la possibilité de quantifier un degré de non-stationnarité et d'en identifier une échelle caractéristique [3].

L'article ici présenté se propose de poursuivre cette étude en examinant dans quelle mesure le test permettrait d'aller au-delà de la seule détection en proposant une caractérisation du type de non-stationnarité dont le signal testé ferait l'objet. Puisqu'aucun cadre ne permet de couvrir toutes les classes de non-stationnarités, on s'intéressera ici à une classe de signaux mêlant modulations d'amplitude et de fréquence à des degrés respectifs choisis compte tenu de leurs caractéristiques temps-fréquence parfaitement identifiables. L'article est organisé ainsi. On rappelle dans la Section 2 le principe des tests de stationnarité faisant usage de substituts. Dans la Section 3, on précise la classe de signaux étudiés, qui conduisent tous aux mêmes substituts stationnaires. Dans la Section 4, on montre que ce socle commun offre le cadre nécessaire à l'étude du comportement du test relativement au type de non-stationnarité considéré. Les résultats des expérimentations menées montrent l'intérêt de l'approche.

## 2 Signaux et tests

Dans la mesure où seules les non-stationnarités du second ordre sont envisagées, les distributions temps-fréquence quadratiques s'imposent comme outils naturels de représentation. On retiendra ici le spectre de Wigner-Ville qui présente la propriété d'être identiquement égal à la densité spectrale de puissance au cours du temps dans le cas stationnaire, et dont un spectrogramme multi-fenêtres est un estimateur naturel [4].

### 2.1 La méthode des substituts

Le mode de génération des substituts repose sur l'intuition selon laquelle un processus non-stationnaire se démarque d'un homologue stationnaire par une structuration temporelle, distinguant ainsi les spectres locaux du spectre global obtenu par marginalisation. Afin de désorganiser la structure temporelle tout en préservant le spectre global, des substituts sont générés en remplaçant simplement la phase de la transformée de Fourier du signal analysé par une séquence i.i.d. selon une loi uniforme sur l'intervalle  $[0, 2\pi[$ .

L'algorithme de génération des substituts est principalement constitué de trois étapes [5]. A partir d'un signal donné  $x(t)$ , on procède ainsi :

1. Calcul de la transformée de Fourier, soit

$$X(f) = \int x(t) e^{-2\pi jft} dt ;$$

2. Conservation du module de  $X(f)$  et remplacement de sa phase par une séquence i.i.d. uniforme, soit

$$X_s(f) = |X(f)| e^{j\phi(f)}$$

avec  $\phi(f) \sim \mathcal{U}[0, 2\pi[$ ;

3. Calcul de la transformée de Fourier inverse du spectre modifié, soit

$$x_s(t) = \int X_s(f) e^{2\pi jft} df.$$

Les deux dernières étapes sont répétées autant de fois que le nombre de substituts à générer. Les substituts générés constituent autant de réalisations de l'hypothèse nulle de stationnarité, à partir desquelles il est possible d'élaborer un test statistique.

### 2.2 Tests de stationnarité

Une fois l'ensemble de signaux stationnaires synthétisé par la méthode des substituts, différentes orientations sont possibles pour proposer des tests de stationnarité du signal étudié. Une première approche consiste à extraire, à partir des substituts, des paramètres temps-fréquence tels que la distance entre spectres locaux et global. L'hypothèse nulle de stationnarité est alors caractérisée à partir de la distribution statistique de la variation temporelle de cette distance [1, 3]. Une autre approche proposée

dans [2, 3] fait usage de paramètres extraits des substituts comme une base d'apprentissage afin d'élaborer un détecteur de nouveauté, à classe unique, de type machine à vecteurs supports [6]. Le signal testé est finalement déclaré non-stationnaire s'il est considéré comme un élément aux caractéristiques nouvelles vis-à-vis de ses substituts. Les auteurs ont montré la pertinence de deux paramètres au cours de tests de stationnarité portant sur des signaux à modulation d'amplitude ou de fréquence : les variances temporelles de la puissance instantanée et de la fréquence instantanée, notées  $P$  et  $F$  [2, 3]. On se propose de poursuivre cette étude en examinant dans quelle mesure les substituts, vus ici au travers du couple  $(P, F)$ , permettraient de caractériser le type de non-stationnarité dont le signal testé ferait l'objet.

Avant de poursuivre, on présente les différentes étapes de l'algorithme de test de stationnarité, tout en rappelant les définitions de  $P$  et  $F$ .

1. Élaboration d'une famille de substituts, comme défini précédemment à la Section 2.1.
2. Calcul des variances temporelles de la puissance instantanée et de la fréquence instantanée de chaque substitut, avec

$$P = \text{std}(P_t)_{t=1, \dots, N}, \quad \text{avec} \quad P_t = \int_0^{\frac{1}{2}} S(t, f) df$$

$$F = \text{std}(F_t)_{t=1, \dots, N}, \quad \text{avec} \quad F_t = \frac{1}{P_t} \int_0^{\frac{1}{2}} f S(t, f) df$$

où  $S(t, f)$  est le spectrogramme normalisé du substitut, et  $\text{std}(\cdot)$  désigne l'écart type.

3. A partir des couples<sup>1</sup>  $(P, F)$  de chaque substitut, on élabore un détecteur de nouveauté, à classe unique, de type machine à vecteurs supports. On obtient alors une frontière de décision et des courbes d'équiprobabilité de mauvaise attribution d'un signal stationnaire à l'ensemble des signaux stationnaires. Voir Figure 3.
4. Le modèle de décision ainsi obtenu est alors appliqué au signal à tester, en déterminant le couple  $(P, F)$  correspondant comme dans l'étape 2. Ceci permet, le cas échéant, de rejeter l'hypothèse nulle de stationnarité, mais aussi offre la possibilité de quantifier un degré de non-stationnarité [3].

## 3 Sur la caractérisation de la non-stationnarité

Dans cette section, on définit une famille de signaux ayant la même densité spectrale d'énergie, conduisant ainsi aux mêmes substituts. On propose alors de caractériser la nature de la non-stationnarité dont le signal testé ferait l'objet.

---

1. En pratique, les paramètres  $P$  et  $F$  sont centrés et réduits.

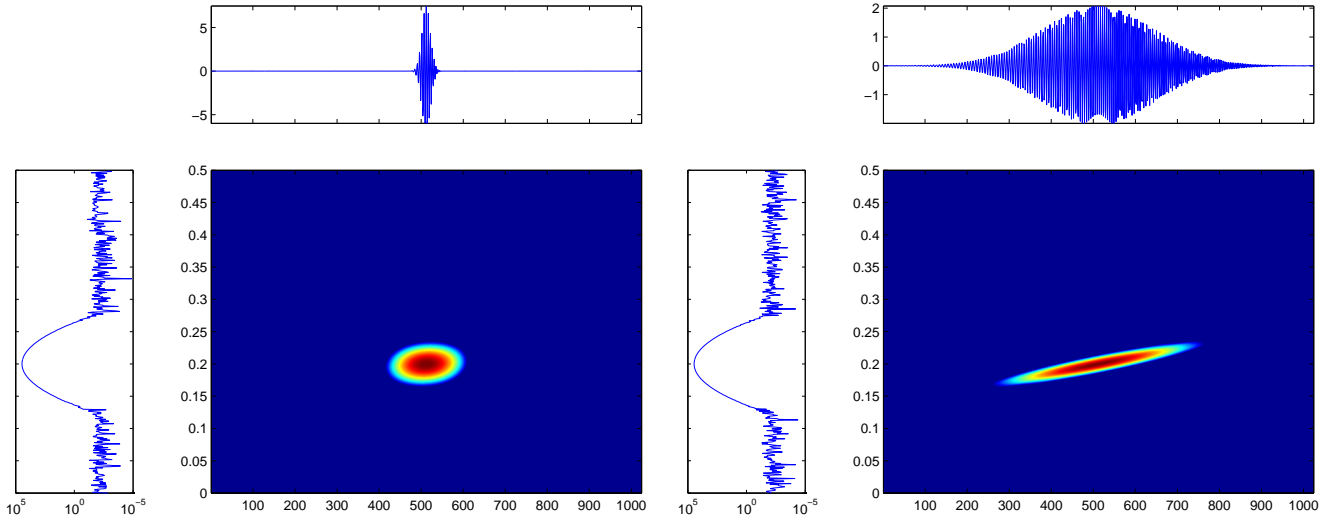


FIGURE 2 – Spectrogramme et marginales temporelle et fréquentielle de deux signaux de la forme (1), paramétrés de sorte à avoir le même spectre global. Dans les deux cas :  $N = 1024$  échantillons,  $f_0 = 0.2$ ,  $\delta f = 0.05$ . À gauche :  $\delta t = 26$ . À droite :  $\delta t = 337$ . Les pentes de modulation  $\beta$  respectives peuvent être retrouvées à partir de l’expression (2).

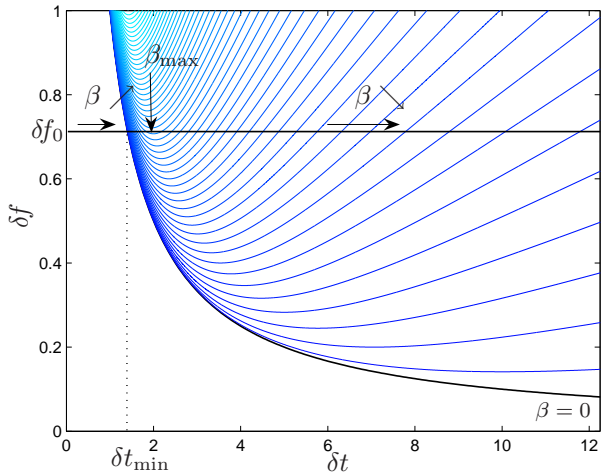


FIGURE 1 – Courbes exprimant  $\delta f$  en fonction de  $\delta t$  à  $\beta$  fixé pour le signal (1).

### 3.1 De la modulation d’amplitude à la modulation de fréquence

On s’intéresse à une classe de signaux définis par

$$x(t) = e^{-\pi\gamma t^2} (1 + \alpha e^{2j\pi f_0 t}) e^{j\pi\beta t^2},$$

combinant modulations d’amplitude et de fréquence. Leurs proportions relatives, ainsi que le degré de non-stationnarité, sont définies par la pente de modulation  $\beta$  et la largeur de l’enveloppe gaussienne  $\delta t = 1/\sqrt{\gamma}$ . En particulier, pour  $\beta = 0$ , on note que  $x(t)$  se réduit à une modulation d’amplitude. La suite de l’exposé se concentre sur la composante

$$x_1(t) = e^{-\pi\gamma t^2} e^{2j\pi f_0 t} e^{j\pi\beta t^2}, \quad (1)$$

étant entendu que les propriétés de  $x(t)$  s’en déduisent directement. Le spectre de  $x_1(t)$  est une fonction gaussienne, entièrement définie par sa largeur de bande  $\delta f$ . On montre que  $\delta f^2 = (\beta^2 + \gamma^2)/\gamma$ , soit encore [4, 7]

$$\delta f^2 = \beta^2 \delta t^2 + 1/\delta t^2. \quad (2)$$

La Figure 1 illustre cette relation, par un faisceau de courbes donnant  $\delta f$  en fonction de  $\delta t$  à  $\beta$  fixé. Ainsi constate-t-on qu’il est possible de générer un ensemble de signaux, paramétrés par  $(\delta t, \beta)$ , incarnant des degrés et formes de non-stationnarités distincts, mais tous dotés du même spectre global défini par  $\delta f$  comme indiqué par la Figure 2. Dans la suite, ce dernier paramètre est par conséquent supposé fixe. On note que pour  $\beta = 0$ , l’étalement temporel du signal  $x_1(t)$  atteint son minimum donné par  $\delta t_{\min} = \delta f^{-1}$ . À l’opposé, il convient en revanche de limiter  $\delta t_{\max}$  de sorte que le support de l’enveloppe gaussienne demeure dans les limites de la fenêtre d’observation du signal. En effet, s’affranchir de cette contrainte a pour conséquence immédiate de s’écarter du modèle spectral gaussien visé dû au fenêtrage rectangulaire alors introduit. On note enfin que  $\beta$  est une fonction croissante puis décroissante de  $\delta t$ , le maximum  $\beta_{\max} = \delta f^2/2$  étant obtenu pour  $\delta t = \sqrt{2}/\delta f$ , comme illustré à la Figure 1.

### 3.2 De la détection à la caractérisation

La classe de signaux introduite précédemment, paramétrés par  $(\delta t, \beta)$  à  $\delta f$  constant, a la particularité d’avoir la même densité spectrale d’énergie tout en décrivant une transition continue de la modulation d’amplitude à la modulation de fréquence. Il en résulte qu’il leur correspond à tous une même famille de substituts, l’écart à ceux-ci per-

mettant de caractériser la nature de la non-stationnarité dont un signal testé ferait l'objet.

Pour illustrer ce point de vue, on considère ici le détecteur non-paramétrique de type machine à vecteurs supports décrit dans [3]. L'apprentissage y est effectué à partir du couple de paramètres  $(P, F)$  extrait de chacun des substituts, comme décrit dans la Section 2.2. La Figure 3 illustre les positions dans le plan  $(P, F)$  de 100 substituts et la frontière de décision associée, ainsi que la trajectoire parcourue par les signaux  $x(t)$  à largeur de bande constante  $\delta f = 0.05$ , paramétrée par  $\delta t$  et  $\beta$ , avec  $f_0 = 0.2$  et  $\alpha = 1/2$ . Pour tous ces signaux, le test rejette l'hypothèse de stationnarité. De plus, tout en attachant à chacun un degré de non-stationnarité comparable (mesuré par la distance à la zone de stationnarité définie par les substituts), il met en évidence un continuum de comportements allant d'une variance  $P$  élevée pour le cas à modulation d'amplitude dominante, à une variance  $F$  élevée lorsque la modulation de fréquence devient prépondérante. Cette observation ouvre la voie à une possibilité de caractérisation fine de types de non-stationnarité, par exemple à des fins de classification.

## 4 Conclusion et perspectives

La méthode des substituts propose un cadre pour tester la non-stationnarité d'un signal donné, en générant des références stationnaires de celui-ci, permettant ainsi de définir l'hypothèse nulle de stationnarité au terme d'un test statistique. Dans cet article, nous avons ré-envisagé cette approche à des fins de caractérisation de différentes formes de non-stationnarité. Nous nous sommes intéressés plus particulièrement à une famille de signaux ayant la même densité spectrale d'énergie, conduisant ainsi aux mêmes substituts. Les expérimentations menées ont montré la pertinence de cette approche.

L'analyse conduite dans cet article fait l'hypothèse d'une échelle d'observation fixée. Ce degré de liberté supplémentaire ouvre la voie à de nouvelles perspectives. On pourra alors agir sur  $f_0$  au regard de  $\delta t$  de manière à caractériser la non-stationnarité éventuelle d'un signal en degré et type par la position du couple  $(P, F)$  dans le plan.

*Remerciements* — Ce travail est soutenu par l'ANR dans le cadre du Projet ANR-07-BLAN-0191-01 "StaRAC" ("Stationnarité relative et approches connexes").

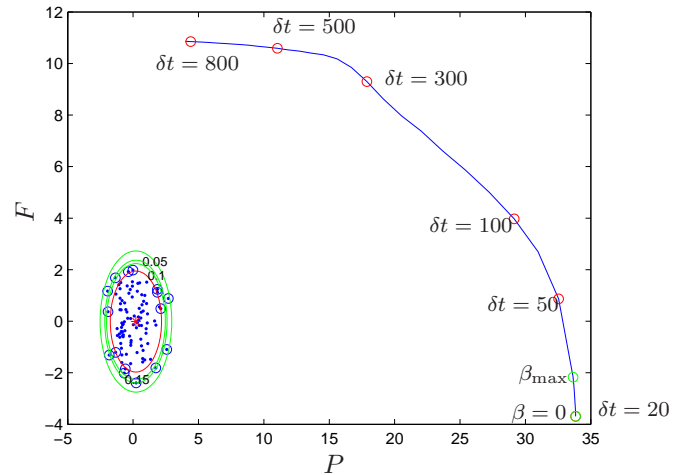


FIGURE 3 – Représentation de 100 substituts de  $x(t)$  dans le plan  $(P, F)$ , ceints par la frontière de décision représentée ici par une ellipse rouge. Les ellipses vertes illustrent les lignes successives d'équiprobabilité 0.15, 0.10 et 0.05 de mauvaise attribution d'un signal stationnaire, selon le sens qui en est donné par les substituts, à la classe des signaux non-stationnaires. La trajectoire représente les lieux des signaux  $x(t)$  testés, paramétrés par  $(\delta t, \beta)$  à  $\delta f$  constant. Les données de l'expérience sont :  $N = 1024$  échantillons,  $f_0 = 0.2$ ,  $\delta f = 0.05$  et  $\alpha = 0.5$ .

## Références

- [1] J. Xiao, P. Borgnat, and P. Flandrin, "Sur un test temps-fréquence de stationnarité," in *21e Colloque sur le Traitement du Signal et des Images (GRETSI)*, (Troyes, France), pp. 957–960, GRETSI, Sept. 2007.
- [2] J. Xiao, P. Borgnat, P. Flandrin, and C. Richard, "Testing stationarity with surrogates : A one-class SVM approach," in *14th IEEE Workshop on Statistical Signal Processing (SSP)*, pp. 720–724, Aug. 2007.
- [3] P. Borgnat, P. Flandrin, P. Honeine, C. Richard, and J. Xiao, "Testing stationarity with surrogates : A time-frequency approach," *soumis à IEEE Trans. Signal Processing*, 2009.
- [4] P. Flandrin, *Temps-Fréquence*. Hermes, 1998.
- [5] J. Theiler, S. Eubank, A. Longtin, B. Galdrikian, and J. Doynne Farmer, "Testing for nonlinearity in time series : the method of surrogate data," *Physica D : Nonlinear Phenomena*, vol. 58, no. 1-4, pp. 77–94, 1992.
- [6] D. M. J. Tax and R. P. W. Duin, "Support vector domain description," *Pattern Recognition Letters*, vol. 20, no. 11-13, pp. 1191–1199, 1999.
- [7] K. Kodera, R. Gendrin, and C. Villedary, "Analysis of time-varying signals with small BT values," *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 26, pp. 64–76, Feb 1978.